

Übungsaufgaben zur Vorlesung Lineare Algebra I

Wintersemester 2017/18, Prof. Dr. B. Fritzsche

Serie 7 - Abgabetermin 27.11.2017

7-A Untersuchen Sie, ob folgende Vektorsysteme $(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3)$ ein Erzeugendensystem oder sogar eine Basis des Unterraumes U des K -Vektorraumes V bilden:

(a) $V = \mathbb{R}^2, K = \mathbb{R}, U = \mathbb{R}^2; \mathbf{u}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \mathbf{u}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \mathbf{u}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix};$

(b) $V = \mathbb{C}^2, K = \mathbb{C}, U = \mathbb{C}^2; \mathbf{u}_1 = \begin{pmatrix} i \\ 0 \end{pmatrix}, \mathbf{u}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \mathbf{u}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix};$

(c) $V = \mathbb{Q}^3, K = \mathbb{Q}, U = \mathbb{Q}^3; \mathbf{u}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \mathbf{u}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}, \mathbf{u}_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix};$

(d) $V = \mathbb{R}^3, K = \mathbb{R}, U := \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 : x_3 = 0 \right\}; \mathbf{u}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \mathbf{u}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \mathbf{u}_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix};$

(e) $V = \mathbb{R}^3, K = \mathbb{R}, U = \text{span}_{\mathbb{R}} \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right); \mathbf{u}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \mathbf{u}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \mathbf{u}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}.$

7-B Gegeben seien im $\mathbb{R}^5$ die Vektoren $\mathbf{x}_1 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}, \mathbf{x}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 4 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \mathbf{x}_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 9 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix}, \mathbf{x}_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \mathbf{x}_5 = \begin{pmatrix} -4 \\ -2 \\ -8 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}.$

Wählen Sie alle Teilfamilien von $(\mathbf{x}_j)_{j=1}^5$ aus, die eine Basis von $U := \text{span}_{\mathbb{R}}(\mathbf{x}_j)_{j=1}^5$ bilden und kombinieren Sie jeweils $\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_5$ daraus linear.

7-C Bestimmen Sie die Menge $\mathcal{T}$ aller $t \in \mathbb{R}$, für die folgende Vektoren $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3$ des $\mathbb{R}$ -Vektorraumes $\mathbb{R}^3$ linear unabhängig sind:

(a) $\mathbf{v}_1 := \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}, \mathbf{v}_2 := \begin{pmatrix} 3 \\ t \\ 11 \end{pmatrix}, \mathbf{v}_3 := \begin{pmatrix} -1 \\ -4 \\ 0 \end{pmatrix},$ (b) $\mathbf{v}_1 := \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \mathbf{v}_2 := \begin{pmatrix} 1 \\ t \\ t \end{pmatrix}, \mathbf{v}_3 := \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ t \end{pmatrix}.$

7-D Begründen Sie, dass die folgenden Mengen V Vektorräume über $\mathbb{C}$ sind und bestimmen Sie jeweils eine Basis von V :

a) $V = \left\{ \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^3 : 3z_1 = z_2 \right\},$

b) $V = \text{span}_{\mathbb{C}} \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ i \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ i \\ 0 \\ i \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} i \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} \right),$

c) V ... Menge aller Polynomfunktionen $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ vom Grad $\leq n$, wobei n eine vorgegebene nichtnegative ganze Zahl ist.

7-Z Sei $(\mathbf{v}_j)_{j \in J}$ eine nichtleere Familie aus einem K -Vektorraum V . Es bezeichne $K^{(J)}$ die Menge aller Familien $(\alpha_j)_{j \in J}$ aus K derart, dass höchstens endlich viele der $\alpha_j, j \in J$, von 0 verschieden sind, sowie $f : K^{(J)} \rightarrow V$ die gemäß $(\alpha_j)_{j \in J} \mapsto \sum_{j \in J} \alpha_j \mathbf{v}_j$ definierte Abbildung. Weisen Sie die Gültigkeit folgender Aussagen nach:

(a) Es ist $(\mathbf{v}_j)_{j \in J}$ genau dann ein Erzeugendensystem von V , wenn f surjektiv ist.

(b) Es ist $(\mathbf{v}_j)_{j \in J}$ genau dann linear unabhängig, wenn f injektiv ist.

(c) Es ist $(\mathbf{v}_j)_{j \in J}$ genau dann eine Basis von V , wenn f bijektiv ist.