Universität Leipzig
Mathematisches Institut
Prof. Dr. László Székelyhidi
Dr. Stefano Modena

WS2017/18

Partielle Differentialgleichungen I

Blatt 13

Lösungen bitte zur Übung am 19. Januar 2018 mitbringen

Aufgabe 49. Sei $u \in C^2(\mathbb{R}^n \times [0,\infty))$ eine Lösung der Wellengleichung

$$\begin{aligned} \partial_t^2 u - \Delta u &= 0 \quad \mathbb{R}^n \times (0,\infty) \\ u &= g \quad \mathbb{R}^n \times \{t=0\} \\ \partial_t u &= h \quad \mathbb{R}^n \times \{t=0\} \end{aligned}$$

wobei $g \in C^1(\mathbb{R})$ und $h \in C(\mathbb{R})$. Betrachte für $r > 0$ die Funktion

$$U(x,r,t) := \fint_{\partial B(x,r)} u(y,t)\, dS(y).$$

(i) Zeigen Sie, dass für jedes $x \in \mathbb{R}^n$ die Funktion U die Gleichung

$$\partial_t^2 U - \frac{1}{r^{n-1}} \partial_r (r^{n-1} \partial_r U) = 0$$

auf $(r,t) \in (0,\infty)^2$ erfüllt.

(ii) Falls $n = 3$, zeigen Sie, dass dann $\tilde{U} := rU$ die eindimensionale Wellengleichung

$$\partial_t^2 \tilde{U} - \partial_r^2 \tilde{U} = 0$$

auf $(r,t) \in (0,\infty)^2$ erfüllt. Was ist die Randbedingung für $r = 0$ und die Anfangsbedingungen für $t = 0$?

(iii) Benutzen Sie die d'Alembert'sche Formel in (ii) um die Lösung der 3D Wellengleichung zu bekommen.

Aufgabe 50 (Fokussierung)**.** Betrachten Sie die 3D Wellengleichung

$$\begin{aligned} \partial_t^2 u - c^2 \Delta u &= 0 \quad \mathbb{R}^3 \times (0,\infty) \\ u &= 0 \quad \mathbb{R}^3 \times \{t=0\} \\ \partial_t u &= h \quad \mathbb{R}^3 \times \{t=0\} \end{aligned}$$

wobei

$$h(x) = \begin{cases} 1 & \text{falls } |x| < 1, \\ 0 & \text{falls } |x| \geq 1. \end{cases}$$

Zeigen Sie, dass die Lösung zum Zeitpunkt $t = \frac{1}{c}$ unstetig (in t) bei $x = 0$ ist.

Lösung. Die Kirchoffsche Formel für die $3D$-Wellengleichung mit Geschwindigkeit c und Anfangsbedingungen $u(x,0) = 0$, $\partial_t u(x,0) = h$ ist

$$u(x,t) = t \fint_{\partial B(x,ct)} h(y) dS(y). \tag{11}$$

Deswegen

$$u(x,t) := \begin{cases} 1, & \text{falls } ct < 1, \\ 0, & \text{falls } ct \geq 1 \end{cases}$$

und es ist klar aus der letzten Formel, dass u, als Funktion von t, zum Zeitpunkt $t = 1/c$ unstetig ist.

Aufgabe 51. Sei $u \in C^\infty(\mathbb{R}^n \times [0,\infty))$ eine Lösung der Wellengleichung

$$\partial_t^2 u - \Delta u = 0, \qquad \text{in } \mathbb{R}^n \times (0,\infty)$$

und gelte $u = 0$ auf einer offenen Teilmenge $A \subseteq \mathbb{R}^n \times (0,\infty)$. Folgt daraus bereits $u = 0$ auf ganz $\mathbb{R}^n \times [0,\infty)$? Wie lautet die Antwort im Falle der Gleichung

$$\partial_t^2 u + \Delta u = 0, \qquad \text{in } \mathbb{R}^n \times (0,\infty)?$$

Aufgabe 52. Sei $U := (0,a) \times (0,b) \subseteq \mathbb{R}^2$ ein Rechteck. Seien

$$\lambda_{n,m} = \pi^2 \left(\frac{n^2}{a^2} + \frac{m^2}{b^2} \right), \quad (n,m) \in \mathbb{N}^2$$

die Eigenwerte des Laplaceoperators (mit Dirichlet-Randbedingungen) in U. Sei

$$N(\mu) := \sharp\big\{(n,m) \in \mathbb{N}^2 : \lambda_{n,m} \leq \mu\big\},$$

wobei $\sharp E$ die Kardinalität von der Menge E bezeichnet. Berechnen Sie

$$\lim_{\mu \to +\infty} \frac{N(\mu)}{\mu}.$$