

ÜA Funktionalanalysis 1 - 12. Serie

1. (schriftlich)

Zeigen Sie, dass für paarweise orthogonale Vektoren $x_1, x_2, \dots$ in einem Hilbertraum H die folgenden Bedingungen äquivalent sind.

- (i) Die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} x_k$ konvergiert in H .
- (ii) Die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} \|x_k\|^2$ konvergiert in $\mathbb{R}$.

Zusatzfrage. Gilt das auch in Prähilberträumen?

2. (schriftlich)

Beweisen Sie den *Satz von Hellinger-Toeplitz*: Jede lineare Abbildung $T : H \rightarrow H$ in einem Hilbertraum, die die Symmetriebedingung

$$(*) \quad \langle Tx, y \rangle = \langle x, Ty \rangle \quad \text{für alle } x, y \in H$$

erfüllt, ist stetig.

Hinweis. Satz vom abgeschlossenen Graphen

3. (mündlich)

Sei H ein (reeller oder komplexer) Hilbertraum. Der adjungierte Operator T^* eines Operators $T \in L(H)$ ist bekanntlich definiert durch

$$\langle Tx, y \rangle = \langle x, T^*y \rangle \quad \text{für alle } x, y \in H.$$

Beweisen Sie die folgenden Rechenregeln für $S, T \in L(H)$ und $\lambda \in \mathbb{K}$.

- (a) $(S + T)^* = S^* + T^*$
- (b) $(\lambda T)^* = \bar{\lambda} T^*$
- (c) $(ST)^* = T^* S^*$
- (d) $T^{**} = T$
- (e) $\|TT^*\| = \|T^*T\| = \|T\|^2$
- (f) $N(T) = R(T^*)^\perp$, $N(T^*) = R(T)^\perp$.

Wie üblich bezeichnet $N(T)$ den Kern/Nullraum und

$R(T)$ den Bildraum von $T \in L(H)$

Abgabe vor der Vorlesung am Dienstag, dem 30.01.2018