Übungsblatt 9

1) Berechnen Sie durch Differenzieren nach einem oder zwei Parametern das Integral

$$\int_0^{\pi/2} \log(a^2 \cos^2 x + b^2 \sin^2 x)\, dx \text{ für } a, b > 0.$$

[Hinweis: es könnte hilfreich sein, zunächst $b = 1$ anzunehmen.] 7 Punkte

2) Sei f_n, $n \in \mathbb{N}$, eine Folge von messbaren Funktionen $f_n : (X, \mathfrak{M}, \mu) \to \mathbb{R}$, die im Maß μ gegen das $(\mathfrak{M})$-messbare $f : X \to \mathbb{R}$ konvergieren und $\int \exp \circ f_n \, d\mu \leq 1$ für alle $n \in \mathbb{N}$ erfüllen. Zeigen Sie, dass auch $\int \exp \circ f \, d\mu \leq 1$ gilt.

   Lässt sich diese Aussage auf die umgekehrten Ungleichungen übertragen?

   3+4 Punkte

3) Wir betrachten messbare Funktionen von $(X, \mathfrak{M}, \mu)$ nach $[-1, 1]$.
   a) Zeigen Sie, dass für solche f, g der Ausdruck

   $$\varrho(f, g) = \min\{\varepsilon \geq 0 \,:\, \mu(\{x \,:\, |f(x) - g(x)| > \varepsilon\}) \leq \varepsilon\}$$

   wohldefiniert ist.
   b) Zeigen Sie, dass $\varrho(\cdot, \cdot)$ symmetrisch ist und der Dreiecksungleichung genügt. Wie kann man $\varrho(f, g) = 0$ charakterisieren?
   c) Beweisen Sie, dass $\varrho(f_n, f) \to 0$ wenn $n \to \infty$ genau dann wenn $f_n \to f$ im Maß μ konvergiert. 2+4+3 Punkte

4) Sei $(X, \mathfrak{A})$ ein messbarer Raum. Wir betrachten auch $\mathbb{R}$ mit den Borelschen Mengen $\mathrm{Bor}(\mathbb{R})$.
   a) Zeigen Sie, wenn $f : X \to [0, \infty)$ eine $\mathfrak{A}$-messbare Funktion ist, dann ist

   $$A(f) = \{(x, t) \,:\, 0 \leq t \leq f(x)\} \in \sigma(\mathfrak{A} \otimes \mathrm{Bor}(\mathbb{R})).$$

   [Hinweis: Betrachten Sie $(X \times [0, \infty)) \setminus A(f)$.]
   b) Beweisen Sie detailiert, dass

   $$\sigma(\mathrm{Bor}(\mathbb{R}) \otimes \mathrm{Bor}(\mathbb{R})) = \mathrm{Bor}(\mathbb{R}^2).$$

   2+4 Punkte

Wie immer, begründen Sie alle Ihre Aussagen sorgfältig!

Abgabe am 13.12.2017, 9.10 Uhr in Hörsaal 5