7.Übung zur Vorlesung Analysis
für Grund-, Mittel- und Förderschullehramt

Mathematisches Institut, Universität Leipzig

Dozent: Dr. Jan-David Hardtke

Ausgabe: Freitag, 24.11.2017
Abgabe: Freitag, 1.12.2017 bis **spätestens** 12:00 Uhr im Postfach Hardtke im Raum A 514 oder im Anschluß an die Donnerstagsvorlesung (verspätete Abgaben werden nicht bewertet).

Wichtig: Alle Abgaben sind mit Namen, Matrikelnummer, Übungstermin und Namen des Übungsleiters zu versehen. Die Übungen müssen **selbstständig** bearbeitet werden (keine Partnerabgabe).

Aufgabe 1 (2+2 Punkte)**.** Wir definieren eine Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ durch

$$f(x) := \begin{cases} x \text{ für } x \in \mathbb{Q} \\ 0 \text{ für } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}. \end{cases}$$

Zeigen Sie:
1) f ist stetig an der Stelle 0.
2) f ist an jeder Stelle $x_0 \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ unstetig.

Aufgabe 2 (2+2 Punkte)**.**
1) Seien $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$. Seien $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ zwei stetige Funktionen. Es gelte $f(a) < g(a)$ und $f(b) > g(b)$.
Zeigen Sie: Es existiert ein $x_0 \in (a, b)$ mit $f(x_0) = g(x_0)$.
(Hinweis: Zwischenwertsatz)
2) Zeigen Sie: Es existiert ein $x_0 \in (0, 1)$ mit

$$\frac{1 + \sqrt[3]{x_0}}{2 + x_0^2} = \sqrt{x_0}.$$

Aufgabe 3 (2+2 Punkte)**.** Berechnen Sie für die folgenden Funktionen jeweils die links- und rechtsseitigen Grenzwerte an der Stelle 0 und begründen

Sie anhand dieser Grenwerte, ob die betreffende Funktion an der Stelle 0 stetig oder unstetig ist.

1)

$$f(x) = \begin{cases} \frac{6x - \frac{1}{x}}{x^2 + \frac{2}{x}} & \text{für } x > 0 \\ \frac{x^5 + 2x^2}{x^4 + x^2} & \text{für } x < 0 \\ 2 & \text{für } x = 0 \end{cases}$$

2)

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\frac{1}{x^2} - \frac{3}{x}}{1 + \frac{1}{x^2}} & \text{für } x > 0 \\ \frac{\frac{1}{x^2} \exp(x) - \frac{5}{x}}{2 + \frac{1}{x^2}} & \text{für } x < 0 \\ 1 & \text{für } x = 0 \end{cases}$$

Aufgabe 4 (2+2 Punkte)**.**

1) Seien $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ zwei stetige Funktionen. Wir setzen

$$h_1(x) = \min\{f(x), g(x)\} \quad \text{und} \quad h_2(x) = \max\{f(x), g(x)\} \quad \text{für } x \in \mathbb{R}.$$

Zeigen Sie, dass auch h_1 und h_2 stetig sind.
(Hinweis: Sie dürfen Aufgabe 3 (a) von Blatt 1 verwenden.)

2) Sei $a \in \mathbb{R}$ und sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine Funktion, die an der Stelle a stetig ist. Ferner sei $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine beschränkte Funktion. Wir setzen

$$h(x) = (f(x) - f(a))g(x) \quad \text{für } x \in \mathbb{R}.$$

Zeigen Sie, dass h an der Stelle a stetig ist.
(Beachten Sie, dass g nicht notwendig stetig ist.)