Nachweis der Konvergenz der Folge $G_n = (1 + \frac{1}{n})^n$

Wir haben bereits (siehe Seite 48) gesehen, dass für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt:

$$G_n := (1 + \tfrac{1}{n})^n \ \leq \ 3.$$

Mittels Satz 2.2 (siehe Seite 53) folgt die Konvergenz der Folge $(G_n)_{n \in \mathbb{N}}$, wenn folgender Satz gezeigt ist:

Satz A:
Die Folge $(G_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist monoton steigend.

Beweis:
Weil alle G_n positiv sind, genügt es, zu zeigen:

$$(1 + \tfrac{1}{n+1})^{n+1} \ : (1 + \tfrac{1}{n})^n \geq 1 \text{ für alle } n \in \mathbb{N}.$$

Dies wird mittels der *Bernoullischen Ungleichung* – siehe Aufgabe 10 – bewiesen.

Für alle $n \in \mathbb{N}$ ist $a = a_n := -\frac{1}{n^2+2n+1} \ \geq \ -1;$

also liefert die Bernoullische Ungleichung für alle $n \in \mathbb{N}$:

$$(1 - \tfrac{1}{n^2+2n+1})^n \geq 1 - \tfrac{n}{n^2+2n+1}.$$

Damit erhalten wir weiter für alle $n \in \mathbb{N}$:

$$\begin{gathered}
(1 + \tfrac{1}{n+1})^{n+1} : (1 + \tfrac{1}{n})^n \ = \\
(\tfrac{n+2}{n+1})^{n+1} \cdot (\tfrac{n}{n+1})^n \ = \\
\tfrac{n+2}{n+1} \cdot (\tfrac{n^2+2n}{n^2+2n+1})^n \ = \\
\tfrac{n+2}{n+1} \cdot (1 - \tfrac{1}{n^2+2n+1})^n \ \geq \\
\tfrac{n+2}{n+1} \cdot (1 - \tfrac{n}{n^2+2n+1}) \ = \\
\tfrac{n+2}{n+1} \cdot \tfrac{n^2+n+1}{n^2+2n+1} \ = \\
\tfrac{n^3+3n^2+3n+2}{n^3+3n^2+3n+1} \ \geq 1.
\end{gathered}$$

Damit ist bewiesen, dass die Folge $(G_n)_{n\in\mathbb{N}}$ streng monoton steigt und folglich – als beschränkte Folge – auch konvergiert.

Bemerkung:
Der Grenzwert e der Folge $(G_n)_{n\in\mathbb{N}}$ heißt die **Eulersche Zahl**. e ist irrational, und es gilt:

$$e \ \approx \ 2,718281828459.$$