Übungsaufgaben Wahrscheinlichkeitstheorie II

Prof. Dr. B. Fritzsche - Wintersemester 2017/2018

Serie X - Abgabe am 03.01.2018 bis spätestens 13.15 Uhr

X-1. Seien $f\colon \mathbb{N}\times\mathbb{N}\to[0,+\infty]$ eine numerische Funktion und $\tau\colon \mathbb{N}\times\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ eine Bijektion. Begründen Sie, dass die Gleichungen

$$\sum_{n=1}^{\infty} f\left(\tau^{-1}(n)\right) = \sum_{j=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty} f(j,k) = \sum_{k=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty} f(j,k)$$

gelten.

X-2. Sein $n\in\mathbb{N}$. Für jedes $j\in\mathbb{Z}_{1,n}$ seien $(\Omega_j,\mathfrak{A}_j,\mu_j)$ ein nichttrivialer σ-endlicher Maßraum und $f_j\colon\Omega_j\to\mathbb{R}$ eine $\mathfrak{A}_j$-$\mathfrak{B}_1$-meßbare Funktion. Weiterhin sei $f\colon \times_{j=1}^{n}\Omega_j\to\mathbb{R}$ gemäß $(\omega_1,\ldots,\omega_n)\mapsto\prod_{j=1}^{n} f_j(\omega_j)$ definiert. Begründen Sie, dass folgende Aussagen gelten:

(a) Es ist f eine $(\bigotimes_{j=1}^{n}\mathfrak{A}_j)$-$\mathfrak{B}_1$-meßbare Funktion.

(b) Für jedes $p\in\mathbb{N}$ gilt

$$\left[\int_{\times_{j=1}^{n}\Omega_j}|f|^p\mathrm{d}\left(\bigotimes_{j=1}^{n}\mu_j\right)\right]^{1/p} = \prod_{j=1}^{n}\left(\int_{\Omega_j}|f_j|^p\mathrm{d}\mu_j\right)^{1/p}.$$

(c) Falls $p\in\mathbb{N}$ ist und für jedes $j\in\mathbb{Z}_{1,n}$ die Funktion f_j zu $\mathcal{L}^p(\Omega_j,\mathfrak{A}_j,\mu_j;\mathbb{R})$ gehört, so gilt $f\in\mathcal{L}^p(\times_{j=1}^{n}\Omega_j,\bigotimes_{j=1}^{n}\mathfrak{A}_j,\bigotimes_{j=1}^{n}\mu_j;\mathbb{R})$.

(d) Falls $f_j\in\mathcal{L}^1(\Omega_j,\mathfrak{A}_j,\mu_j;\mathbb{R})$ für jedes $j\in\mathbb{Z}_{1,n}$ erfüllt ist, so gilt

$$\int_{\times_{j=1}^{n}\Omega_j} f\mathrm{d}\left(\bigotimes_{j=1}^{n}\mu_j\right) = \prod_{j=1}^{n}\int_{\Omega_j} f_j\mathrm{d}\mu_j.$$

X-3. Seien $(\Omega,\mathfrak{A},\mu)$ ein nichttrivialer Maßraum sowie f eine reellwertige Funktion aus $\mathcal{E}^*(\Omega,\mathfrak{A})$. Weisen Sie die Gültigkeit folgender Aussagen nach:

(a) Es ist $F\colon\Omega\times[0,+\infty)\to\mathbb{R}^2$ gemäß $(\omega,t)\mapsto\binom{f(\omega)}{t}$ eine $[\mathfrak{A}\otimes(\mathfrak{B}_1\cap[0,+\infty))]$-$\mathfrak{B}_2$-messbare Abbildung.

(b) Die Mengen $E_f:=\{(\omega,t)\in\Omega\times[0,+\infty)\colon f(\omega)\geq t\}$ und $\widetilde{E}_f:=\{(\omega,t)\in\Omega\times[0,+\infty)\colon f(\omega)>t\}$ gestatten mit $H_1:=\{\binom{x_1}{x_2}\in\mathbb{R}^2\colon x_1\geq x_2\}$ und $H_2:=\{\binom{x_1}{x_2}\in\mathbb{R}^2\colon x_1>x_2\}$ die Darstellungen $E_{f,[0,+\infty)}=F^{-1}(H_1)$ und $\widetilde{E}_f=F^{-1}(H_2)$ und gehören insbesondere zu $\mathfrak{A}\otimes\mathfrak{B}_1$. Des Weiteren gilt für jedes $t\in[0,+\infty)$ dann $(E_f)_{\bullet t}=\{f\geq t\}$ und $(\widetilde{E}_f)_{\bullet t}=\{f>t\}$.

(c) Die Menge $G_f:=\{(\omega,f(\omega))\colon\omega\in\Omega\}$ gestattet die Darstellung $G_f=E_f\setminus\widetilde{E}_f$ und gehört insbesondere zu $\mathfrak{A}\otimes\mathfrak{B}_1$.

(d) Bezeichne $\pi_{1\bullet}$ das erste Cavalierische Produktmaß von μ und $\lambda^{(1)}$. Dann gelten

$$\pi_{1\bullet}(E_f)=\int_\Omega f d\mu,\qquad \pi_{1\bullet}(\widetilde{E}_f)=\int_\Omega f\mathrm{d}\mu\qquad\text{und}\qquad\pi_{1\bullet}(G_f)=0.$$

(e) Sei μ sogar σ-endlich. Weiter seien $\rho_{\mu,f}\colon\ :\mathbb{R}\to[0,\infty]$ gemäß $t\mapsto\mu(\{f\geq t\})$ und $\sigma_{\mu,f}\colon\mathbb{R}\to[0,\infty]$ gemäß $t\mapsto\mu(\{f>t\})$ definiert. Dann sind $1_{[0,\infty)}\cdot\rho_{\mu,f}$ und $1_{[0,\infty)}\cdot\sigma_{\mu,f}$ jeweils zu $\mathcal{E}^*(\mathbb{R}^1,\mathfrak{B}_1)$ gehörige, monoton nichtwachsende Funktionen und es gelten

$$\int_\Omega f\mathrm{d}\mu=\int_{[0,+\infty)}\rho_{\mu,f}\mathrm{d}\lambda^{(1)}\qquad\text{sowie}\qquad\int_\Omega f\mathrm{d}\mu=\int_{[0,+\infty)}\sigma_{\mu,f}\mathrm{d}\lambda^{(1)}.$$