

Übungen zur Vorlesung
Analysis für Informatiker
Blatt 7

Kein Mensch lernt denken, indem er die fertig geschriebenen Gedanken anderer liest, sondern dadurch, dass er selbst denkt.

M. EMINESCU (1850-1889)

Aufgabe 1. (Konvergenz von Reihen, schriftlich, 3 Punkte)

Überprüfen Sie folgende Reihen auf Konvergenz mittels der Definition und bestimmen Sie die Summe im Falle der Konvergenz.

$$\sum_{n=1}^{\infty} (\sqrt{n+1} - \sqrt{n}), \quad \sum_{n=2}^{\infty} \frac{2}{n^2 - 1}.$$

(Hinweis: Für die zweite Reihe finden Sie zuerst $A, B \in \mathbb{R}$ mit $\frac{2}{n^2-1} = \frac{A}{n-1} + \frac{B}{n+1}$.)

Aufgabe 2. (Rechenregeln für Konvergenz, 2 Zusatzpunkte (sonst mündlich))

Seien $c \in \mathbb{R}$ und $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ und $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ zwei konvergente Reihen mit Summen jeweils gleich a und b . Zeigen Sie, dass die Reihen $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n)$ und $\sum_{n=1}^{\infty} ca_n$ ebenfalls konvergieren, und ihre Summen sind jeweils gleich $a + b$ und ca .

Aufgabe 3. (Konvergenz und absolute Konvergenz von Reihen, a), b) schriftlich, a) 5 Punkte, b) 3 Punkte, c) 1 Zusatzpunkt)

a) Sind die folgenden Reihen konvergent bzw. absolut konvergent

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n, \quad \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\log n}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} \quad ?$$

Begründen Sie Ihre Antwort.

b) Prüfen Sie folgende Reihen auf Konvergenz

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\log n}{n}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^n}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n - \log n}{n^3 + n}.$$

c) Zeigen Sie, dass die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n}{n+1}\right)^n$ divergiert.

(Hinweis: Bestimmen Sie dafür den Limes der Folge $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ für $a_n := \left(\frac{n}{n+1}\right)^n$.)

Die schriftlich bearbeiteten Übungsaufgaben sind zusammengeheftet vor der Vorlesung am Montag, dem 27. 11. 2017 abzugeben.