Übungsblatt 6

1) i) Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ nichtfallend. Zeigen Sie, dass f als Funktion des messbaren Raumes $(\mathbb{R}, \mathrm{Bor}(\mathbb{R}))$ in sich selbst meßbar ist.

ii) Sei $(X, \mathfrak{M})$ ein messbarer Raum und $g : X \to \bar{\mathbb{R}}$ eine Funktion. Zeigen Sie, dass g $(\mathfrak{M})$-messbar ist genau dann wenn für jedes rationale q die Menge $\{g > q\}$ zu $\mathfrak{M}$ gehört.

iii) Eine Funktion $h : \mathbb{R}^d \to \bar{\mathbb{R}}$ heisst unterhalbstetig, wenn für jede konvergente Folge $(x_n)_{n=1}^\infty$ gilt

$$\liminf_{n\to\infty} h(x_n) \geq h(\lim_{n\to\infty} x_n).$$

Zeigen Sie, dass h notwendigerweise $(\mathrm{Bor}(\mathbb{R}^d))$-messbar ist. Was passiert, wenn wir nur

$$\limsup_{n\to\infty} h(x_n) \geq h(\lim_{n\to\infty} x_n)$$

für jede konvergente Folge fordern? $2 + 1 + (3 + 2^*)$ Punkte

2) Sei $(X, \mathfrak{M}, \mu)$ ein vollständiger Maßraum in Sinne von Aufgabe 3 auf Zettel 4, und sei $f : (X, \mathfrak{M}) \to (Y, \mathfrak{A})$ messbar, wobei $(Y, \mathfrak{A})$ ein beliebiger messbarer Raum ist. Zeigen Sie, falls $g : X \to Y$ μ-fast überall gleich f ist, dann ist $g : (X, \mathfrak{M}) \to (Y, \mathfrak{A})$ auch messbar. 4 Punkte

3) Wir betrachten einen messbaren Raum $(X, \mathfrak{M})$ sowie $(\mathfrak{M})$-messbare Funktionen $f, g : X \to \bar{\mathbb{R}}$. Zeigen Sie,

i) $\{f > g\} = \{x : f(x) > g(x)\} \in \mathfrak{M}$,

ii) die Menge D, wo $f + g$ definiert ist, ist in $\mathfrak{M}$,

iii) die auf D definierte Funktion $f + g$ ist auch $(\mathfrak{M})$-messbar.

[Hinweis: ein direkter Beweis auf der Idee von Aufgabe 1.ii) basierend, ist für i) und iii) möglich.] $1 + 2 + 3$ Punkte

4) a) Geben Sie ein Beispiel, welches die Notwendigkeit unserer Voraussetzung, dass $\mu(X) < \infty$, im Satz von Jegoroff zeigt, begründen Sie Ihre Behauptung sorgfältig. 3 Punkte

b) Sei $E \subset \mathbb{R}$ eine Lebesgue messbare Menge mit $\lambda(E) < \infty$ und $f : E \to \mathbb{R}$ Lebesgue messbar. Zeigen Sie, dass es für jedes $\varepsilon > 0$ eine Menge $K \subset E$ gibt, so dass $f_{|K}$ gleichmässig stetig ist und $\lambda(E \setminus K) < \varepsilon$.
Beweisen Sie, dass diese Schlussfolgerung nicht gilt für $E = \mathbb{R}$ und $f(x) = x^2$.
2+ 5^*-Punkte

c) Sei μ ein Maß auf $\mathrm{Bor}(\mathbb{R})$ so dass $0 < \mu(\mathbb{R}) < \infty$ und $\mu(A \cap B) = \mu(A) \cdot \mu(B)$ für alle Borelschen Mengen A, B. Zeigen Sie, dass μ ein Dirac-Maß ist, das heisst, es gibt einen Punkt $p_0 \in \mathbb{R}$, so dass $\mu(B) = 1$ falls $p_0 \in B$ und $\mu(B) = 0$ sonst, für alle $B \in \mathrm{Bor}(\mathbb{R})$. *[Hinweis: mögliche Werte für $\mu(A)$?]* 4 Punkte

Wie immer, begründen Sie Ihre Aussagen ausreichend! (b.w.)

Abgabe am 23.11.2017, 13:10 in der Übungsgruppe bei Herrn Marohn, P-801.

Die Übungsscheinklausur findet am 6.2.2018 von 9.15-10.45 im FKH statt.