8. Übungsblatt zu "Mathematik I für Wirtschaftswissenschaftler"

Leipzig, den 27.11.2017

29.) Ermitteln Sie zu den folgenden Polynomen p_i, q_i – für $i \in \{1,2\}$ – Polynome s_i, r_i, so dass gilt:

$$p_i(x) \;=\; q_i(x) \cdot s_i(x) + r_i(x) \text{ für alle } x \in \mathbb{R}; grad(r_i) < grad(q_i).$$

i) $p_1(x) \;=\; 2x^3 - 5x^2 + 3x - 1,\; q_1(x) \;=\; 2x - 4;$

ii) $p_2(x) \;=\; x^4 - 7x^3 + 2x^2 - x + 3,\; q_2(x) \;=\; x^2 - 3x + 1.$

30i) Beweisen Sie durch vollständige Induktion: Ist p ein Polynom vom Grad n mit $n \in \mathbb{N}$, so besitzt p höchstens n paarweise verschiedene Nullstellen.

ii) Es seien $n+1$ Punkte $(x_0, y_0), (x_1, y_1), ..., (x_n, y_n)$ in der Ebene $\mathbb{R}^2$ gegeben mit $x_i \neq y_j$ für $i \neq j$. Ferner seien die zugehörigen *Lagrangeschen Interpolationspolynome* $L_0, L_1, ..., L_n$ vom Grad n definiert durch:

$$L_i(x) \;:=\; \prod_{k=0,k\neq i}^{n} \frac{x-x_k}{x_i-x_k} \;=\; \frac{(x-x_0)...(x-x_{i-1})\cdot(x-x_{i+1})...(x-x_n)}{(x_i-x_0)...(x_i-x_{i-1})(x_i-x_{i+1})...(x_i-x_n)}.$$

Beweisen Sie, dass $p : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, gegeben durch

$$p(x) := \sum_{i=0}^{n} y_i \cdot L_i(x) \;=\; y_0 \cdot L_0(x) \;+ ... +\; y_n \cdot L_n(x)$$

das *einzige* Polynom mit folgenden Eigenschaften ist:

(I) Für alle i mit $0 \leq i \leq n$ ist $p(x_i) \;=\; y_i$.

(II) p hat höchstens den Grad n.

Hinweise: In i) können Sie annehmen, dass p überhaupt eine Nullstelle x_0 hat. Dividieren Sie das Polynom p durch das Polynom $x - x_0$.
In ii) verifiziert man direkt durch Einsetzen, dass das angegebene Polynom p die gewünschten Eigenschaften hat. Gäbe es zwei Polynome p_1, p_2 mit diesen Eigenschaften, so wende man i) an auf die Differenz $p_1 - p_2$.

31.) Von dem Polynom $p : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definiert durch $p(x) \;:=\; x^3 - 5x^2 - x + 21$ ist bekannt, dass es eine ganzzahlige Nullstelle im Intervall $[-3, 3]$ hat. Ermitteln Sie *alle* Nullstellen von p.

Hinweis: Hat man eine Nullstelle x_1 ermittelt, so sind noch die Nullstellen des quadratischen Polynoms $p(x) : (x - x_1)$ zu berechnen.

32.) Beweisen Sie den Satz von Pythagoras:

In einem rechtwinkligen Dreieck ist die Summe der Flächeninhalte der Quadrate über den Katheten gleich dem Flächeninhalt des Quadrats über der Hypotenuse.

Hinweis: Es seien a, b die Längen der Katheten, und c sei die Länge der Hypotenuse. Zerlegen Sie ein Quadrat der Seitenlänge $a + b$ in ein Quadrat der Seitenlänge c und vier rechtwinklige Dreiecke, die alle kongruent zu dem gegebenen sind.