Übungsaufgaben zur Vorlesung Lineare Algebra I

Wintersemester 2017/18, Prof. Dr. B. Fritzsche

Serie 6 - Abgabetermin 20.11.2017

6-A Seien $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$. Begründen Sie, dass die Menge $C_{[a,b]}$ aller stetigen Funktionen $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ ein Unterraum des Vektorraumes $\mathbb{R}_{[a,b]}$ aller auf $[a, b]$ definierten reellwertigen Funktionen ist.

6-B Untersuchen Sie, ob folgende Vektoren $\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}$ sich als Linearkombinationen von $\mathbf{x}_1$ und $\mathbf{x}_2$ im K-Vektorraum V darstellen lassen:

(a) $V = \mathbb{R}^3, K = \mathbb{R}; \mathbf{x}_1 := \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \mathbf{x}_2 := \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}; \mathbf{x} := \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 12 \end{pmatrix}, \mathbf{y} := \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}, \mathbf{z} := \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix};$

(b) $V = \mathbb{C}^3, K = \mathbb{C}; \mathbf{x}_1 := \begin{pmatrix} i \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \mathbf{x}_2 := \begin{pmatrix} 2+i \\ 0 \\ 3-i \end{pmatrix}; \mathbf{x} := \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 4+i \end{pmatrix}, \mathbf{y} := \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \mathbf{z} := \begin{pmatrix} -1-2i \\ 2i \\ 1-3i \end{pmatrix}.$

6-C Untersuchen Sie, ob folgende Vektoren $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3$ im K-Vektorraum V linear unabhängig sind:

(a) $V = \mathbb{R}^3,\ K = \mathbb{R}; \mathbf{x}_1 := \begin{pmatrix} \pi \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \mathbf{x}_2 := \begin{pmatrix} 1 \\ \pi \\ 2 \end{pmatrix}, \mathbf{x}_3 := \begin{pmatrix} \pi \\ \pi^2 \\ 2\pi \end{pmatrix};$

(b) $V = \mathbb{R}^3,\ K = \mathbb{R}; \mathbf{x}_1 := \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \mathbf{x}_2 := \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \mathbf{x}_3 := \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix};$

(c) $V = \mathbb{R},\ K = \mathbb{R};\ \mathbf{x}_1 = 1,\ \mathbf{x}_2 = \sqrt{2},\ \mathbf{x}_3 = \sqrt{3};$

(d) $V = \mathbb{R},\ K = \mathbb{Q};\ \mathbf{x}_1 = 1,\ \mathbf{x}_2 = \sqrt{2},\ \mathbf{x}_3 = \sqrt{3}.$

6-D Sei V der $\mathbb{R}$-Vektorraum aller reellwertigen Funktionen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Zeigen Sie, dass die wie folgt definierten Funktionen f, g und h aus V jeweils linear unabhängig sind:

(a) $f(x) := e^x,\ g(x) := \cos x,\ h(x) := x^3;$ (b) $f(x) := e^x,\ g(x) := e^{(x^2)},\ h(x) := x;$

(c) $f(x) := e^x,\ g(x) := \sin x,\ h(x) := \cos x.$

6-Z Seien K ein Körper und $\tilde{K}$ ein Unterkörper von K. Zeigen Sie, dass jeder K-Vektorraum V auch ein $\tilde{K}$-Vektorraum ist, wobei ein Element $\tilde{\alpha} \in \tilde{K} \subseteq K$ wie bei der gegebenen Operation von K auf V operiert.