Mathematisches Institut
Universität Leipzig
Dr. Konrad Zimmermann

Leipzig, den 27. Oktober 2017

Übungen zur Vorlesung

Mathematik 3 für Physiker und Meteorologen

Blatt 04

Aufgabe 1 (4 Punkte). Seien I ein offenes Intervall, $x_0 \in I$, $A(x) : I \to \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ eine stetige Funktion und $y_1, \ldots, y_k : I \to \mathbb{R}^n$ Lösungen des homogenen Differenzialgleichungssystems $y' = A(x)y$. Zeige die Äquivalenz der folgenden Aussagen:

(i) Die Elemente $y_1(x), \ldots, y_k(x)$ sind linear unabhängig (in $\mathbb{R}^n$) für jedes $x \in I$.

(ii) Die Elemente $y_1(x_0), \ldots, y_k(x_0)$ sind linear unabhängig (in $\mathbb{R}^n$).

(iii) Es existiert ein $x \in I$ so, dass $y_1(x), \ldots, y_k(x)$ linear unabhängig sind (in $\mathbb{R}^n$).

(iv) Die Funktionen $y_1, \ldots, y_k$ sind linear unabhängig (in $\mathbf{C}^1(I, \mathbb{R}^n)$).

Zeige, dass es kein homogenes, lineares Differenzialgleichungssystem erster Ordnung gibt, so dass $y_1, y_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$y_1(x) := \begin{pmatrix} \cos(x) \\ \sin(x) \end{pmatrix} \text{ und } y_2(x) := \begin{pmatrix} \sin(x) \\ \cos(x) \end{pmatrix}$$

Lösungen sind.

Aufgabe 2 (5 Punkte). Sei $n \in \mathbb{N}$, $n \neq 1$. Sei I ein Intervall und seien $p, q : I \to \mathbb{R}$ stetige differenzierbare Funktionen. Seien $x_0 \in I$ und $y_0 \in \mathbb{R}$. Zeige, dass das Anfangswertproblem

$$\begin{aligned} y' + p(x)y + q(x)y^n &= 0 \\ y(x_0) &= y_0 \end{aligned}$$

eine eindeutige maximale Lösung hat.

Zeige, dass $y : J \to \mathbb{R}$, $y(x) \neq 0$ für alle $x \in J$ eine Lösung der obigen Differenzialgleichung ist, genau dann wenn $u(x) := y(x)^{1-n}$ eine Lösung der linearen Differenzialgleichung

$$u' + (1-n)p(x)u + (1-n)q(x) = 0$$

ist.

Wie müssen die Aussagen für $n \in \mathbb{Z}$, $n \neq 1$ abgeändert werden?

Aufgabe 3 (4 Punkte). Finde für jedes $n \in \mathbb{Z} \setminus \{1\}$ alle maximalen Lösungen des Anfangswertproblems

$$y' = y + y^n$$

zu den Anfangswerten $y(0) = 1$, $y(0) = 0$ und $y(0) = -1$.

Die schriftlich bearbeiteten Übungsaufgaben sind vor der Vorlesung am Dienstag, dem 07.11.2017 abzugeben.