Mathematisches Institut
Universität Leipzig
Dr. Konrad Zimmermann

Leipzig, den 15. Januar 2018

Übungen zur Vorlesung

Mathematik 3 für Physiker und Meteorologen

Blatt 13

Aufgabe 1 (3 Punkte). Seien $f, g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ stetig differenzierbare Funktionen und f habe kompakten Träger. Zeige, dass für jedes $i \in \{1, \dots, n\}$ gilt

$$\int (\partial_i f) g \mathrm{d}\lambda^n = -\int f \partial_i g \mathrm{d}\lambda^n.$$

Hinweis: schließe $\operatorname{supp} f$ in einen hinreichend großen Quader oder Würfel ein.

Aufgabe 2 (3 Punkte). Betrachte das Vektorfeld

$$\begin{aligned} E : \mathbb{R}^3 \setminus \{0\} &\to \mathbb{R}^3 \\ x &\mapsto \frac{x}{\|x\|^3}. \end{aligned}$$

Bestimme $\operatorname{div} E$ und

$$\int_{B_1(0)\setminus\{0\}} \operatorname{div} E \mathrm{d}\lambda^3$$

und vergleiche mit dem Ergebnis von Übung 3 vom Blatt 12.

Aufgabe 3 (4 Punkte). Bestimme

$$\int_M (1, 0, 0) \mathrm{d}\sigma$$

wobei M die durch $x^2 + 2y^2 + 3z^2 = 1$ charakterisierte Oberfläche eine Ellipsoids bezeichnet.

Bestimme für das Vektorfeld

$$\begin{aligned} E : \mathbb{R}^3 \setminus \{0\} &\to \mathbb{R}^3 \\ x &\mapsto \frac{x}{\|x\|} \end{aligned}$$

das Kurvenintegral

$$\int_\gamma \omega_E$$

wobei γ den Einheitskreis in der x-y-Ebene um den Punkt $(10, 14, 0)$ bezeichnet.

Aufgabe 4 (3 Punkte). Sei $\gamma : I \to \mathbb{R}^2$, $\gamma(t) = (x(t), y(t))$ eine reguläre geschlossene Kurve in $\mathbb{R}^2$ die den Koordinatenursprung genau einmal umläuft. Zeige, dass die von γ eingeschlossene Fläche durch

$$\frac{1}{2}\left|\int_I (x(t)y'(t) - y(t)x'(t))\mathrm{d}t\right|$$

gegeben ist.

Hinweis: Verwende den Satz von Green.

Die schriftlich bearbeiteten Übungsaufgaben sind vor der Vorlesung am Dienstag, dem 23.01.2018 abzugeben.