ÜA Funktionalanalysis 1 - 5. Serie

1. (schriftlich)

   Sei U ein echter linearer Teilraum eines endlichdimensionalen normierten Raumes X. Beweisen Sie, dass dann ein $x \in X$ existiert mit

   $$\|x\| = 1 = d(x,U)\,.$$

   (Wie üblich bezeichnet $d(x,U) = \inf\{\|x-u\| : u \in U\}$ den Abstand von x zu U. In diesem Fall gilt also das Rieszsche Lemma mit $\varepsilon = 0$.)

2. (mündlich)

   Im normierten Raum $X = \{f \in C[0,1] : f(1) = 0\}$ (mit der sup-Norm) betrachten wir den linearen Teilraum $U = \{g \in X : \int_0^1 g(t)\,dt = 0\}$. Zeigen Sie, dass U abgeschlossen ist und dass keine Funktion $f \in X$ existiert mit $\|f\| = 1 = d(f,U)$.

   (In diesem Fall gilt also das Rieszsche Lemma *nicht* mit $\varepsilon = 0$.)

   Hinweis: siehe das Buch von D. Werner, Funktionalanalysis.

3. (schriftlich)

   Jede reelle $m \times n-$Matrix $A = (a_{ij})$ erzeugt eine lineare Abbildung $A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$. Zeigen Sie:

   $$\|A : \ell_\infty^n \to \ell_\infty^m\| = \max_{1\le i\le m} \sum_{j=1}^n |a_{ij}| \quad \text{(Zeilensummennorm der Matrix } A\text{)}$$

   $$\|A : \ell_1^n \to \ell_1^m\| = \max_{1\le j\le n} \sum_{i=1}^m |a_{ij}| \quad \text{(Spaltensummennorm der Matrix } A\text{)}$$

4. (mündlich)

   Sei $k : [0,1] \times [0,1] \to \mathbb{C}$ eine stetige Funktion. Zeigen Sie, dass durch

   $$(Tf)(x) := \int_0^1 k(x,t)f(t)\,dt$$

   eine stetige lineare Abbildung $T : C[0,1] \to C[0,1]$ definiert wird mit

   $$\|T\| = \max_{0\le x\le 1} \int_0^1 |k(x,t)|\,dt\,.$$

   Hinweis: vgl. das Beispiel $Sf := \int_0^1 f(t)g(t)\,dt$ aus der Vorlesung

Terminänderung: Die Übung vom 21.11.2017 wird verlegt auf
Freitag, den 24.11.2017, 9.15-10.45 Uhr, Hörsaal 13

Abgabe der Lösungen vor der Vorlesung am Dienstag, dem 21.11.2017