Mathematisches Institut
Universität Leipzig
Dr. Konrad Zimmermann

Leipzig, den 20. November 2017

Übungen zur Vorlesung

Mathematik 3 für Physiker und Meteorologen

Blatt 7

Mit λ (λ^n) sei stets das (n-dimensionale) Lebesgue-Maß bezeichnet.

Aufgabe 1 (3 Punkte). Sei A die Menge

$$A := \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \middle|\, y \geq x^2 \text{ und } x \geq y^2\right\}.$$

Bestimme die Fläche von A, das heißt $\lambda^2(A)$.

Berechne

$$\int_A (x^2+y^2)\mathrm{d}\lambda^2(x,y).$$

Aufgabe 2 (3 Punkte). Seien $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ and $(\Phi, \mathcal{A}, \nu)$ σ-endliche Maßräume und $g : \Omega \to \overline{\mathbb{R}}^+$ sowie $h : \Phi \to \overline{\mathbb{R}}^+$ integrierbar. Zeige, dass falls $f : \Omega \times \Phi \to \overline{\mathbb{R}}$ messbar ist und $|f(\omega,\varphi)| \leq g(\omega)h(\varphi)$ für alle $\omega \in \Omega$ und alle $\varphi \in \Phi$ erfüllt, dann gilt

$$\int f(\omega,\varphi)\mathrm{d}(\mu\otimes\nu)(\omega,\varphi) = \int\int f(\omega,\varphi)\mathrm{d}\mu(\omega)\mathrm{d}\nu(\varphi)$$

Aufgabe 3 (5 Punkte). Sei $p : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ ein Polynom und $\|\cdot\|$ die euklidische Norm auf $\mathbb{R}^2$. Zeige, dass die Funktion $x = (x_1,x_2) \mapsto p(x)e^{-\|x\|}$ für $x \in \mathbb{R}^2$ λ^2-integrierbar ist.

Hinweis: Betrachte zunächst den Fall wo $p(x_1,x_2) = x_1^p x_2^q$ ein Monom ist und zeige, dass $e^{-\|x\|} \leq e^{-\rho|x_1|}e^{-\rho|x_2|}$ für passendes $\rho > 0$ gilt.

Aufgabe 4 (3 Punkte). Sei $\|\cdot\|$ die euklidische Norm. Berechne

$$\int xe^{-\|(x,y)\|}\mathrm{d}\lambda^2(x,y)$$

Die schriftlich bearbeiteten Übungsaufgaben sind vor der Vorlesung am Dienstag, dem 28.11.2017 abzugeben.