

Partielle Differentialgleichungen I

Blatt 5

Lösungen bitte zur Übung am 10. November 2017 mitbringen

Aufgabe 17 (Maximumprinzip für elliptische Operatoren). Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen und beschränkt. Betrachten Sie den Operator

$$Lu := \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x) D_{ij}u + \sum_{i=1}^n b_i(x) D_i u + c(x)u,$$

wobei $a_{ij}, b_i, c \in C(\bar{U})$ und $a_{ij} = a_{ji}$. Der Operator L heißt *gleichmäßig elliptisch*, falls ein $\lambda > 0$ existiert so dass

$$\sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x) \xi_i \xi_j \geq \lambda |\xi|^2, \quad \text{für alle } x \in U \text{ und } \xi \in \mathbb{R}^n.$$

Sei L ein gleichmäßig elliptischer Operator, sei $c(x) \leq 0$ für alle $x \in \bar{U}$ und sei $u \in C^2(U) \cap C(\bar{U})$. Beweisen Sie, dass, falls

$$-Lu \leq 0 \text{ in } U$$

und u hat ein nichtnegatives Maximum in $\bar{U}$, dann das schwache Maximumprinzip

$$\max_{\bar{U}} u(x) \leq \max_{\partial U} u$$

gilt.

Hinweise: betrachten Sie zunächst den Fall $-Lu < 0$. In dem Fall $-Lu \leq 0$ betrachten Sie die Funktion $u(x) + \varepsilon v(x)$ für eine geeignet gewählte Funktion $v(x)$.

Aufgabe 18. Zeigen Sie jeweils anhand Gegenbeispielen, dass die beiden Voraussetzungen

(i) $c(x) \leq 0$ in $\bar{U}$;

(ii) die Existenz von einem nichtnegativem Maximum in $\bar{U}$

in Aufgabe 17 notwendig sind.

Aufgabe 19. Sei $U \subset \mathbb{C}$ offen und sei $f : U \rightarrow \mathbb{C}$ holomorph in U und ohne Nullstellen. Zeigen Sie, dass $\log |f|$ harmonisch ist in U .

Hinweis: $f = u + iv$ ist holomorph (wobei $u : U \rightarrow \mathbb{R}$, $v : U \rightarrow \mathbb{R}$) genau dann, wenn u, v die *Cauchy-Riemann Gleichungen*

$$\begin{cases} \partial_x u = \partial_y v, \\ \partial_y u = -\partial_x v \end{cases}$$

erfüllen.

Aufgabe 20. Sei $U \subset \mathbb{R}^2$ offen, beschränkt, mit C^1 Rand, und seien $u, v \in C^1(\overline{U})$. Betrachten Sie die Funktion $f : U \subset \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$, definiert durch $f := u + iv$. Zeigen Sie, dass

$$\int_{\partial U} f(z) dz = 2i \int_U \bar{\partial} f \, dx dy,$$

wobei $\bar{\partial} = \frac{1}{2}(\partial_x + i\partial_y)$. Folgern Sie, dass

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial U} \frac{f(z)}{z - z_0} dz - \frac{1}{\pi} \int_U \frac{\bar{\partial} f(z)}{z - z_0} dx dy$$

für alle $z_0 \in U$.

Hinweis: Ist $f : A \subset \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ eine stetige Funktion und ist $\gamma : [\alpha, \beta] \rightarrow A$ eine C^1 Kurve in A , so ist das *Wegintegral* von f entlang des Weges γ definiert als

$$\int_{\gamma} f(z) dz := \int_{\alpha}^{\beta} f(\gamma(t)) \cdot \dot{\gamma}(t) dt,$$

wobei der Malpunkt komplexe Multiplikation bezeichnet.