Übungsaufgaben zur Vorlesung Lineare Algebra I

Wintersemester 2017/18, Prof. Dr. B. Fritzsche

Serie 1 - Abgabetermin 16.10.2017

1-A. Seien $\mathcal{M}_1 := \{1; 2\}$ und $\mathcal{M}_2 := \{2; 3; 5\}$. Welche der folgenden Aussagen sind falsch (mit Begründung)?

(a) $\mathcal{M}_1 \subseteq \mathcal{M}_2$.

(b) $\mathcal{M}_1 \cap \mathcal{M}_2 \subseteq \mathcal{M}_1 \setminus \mathcal{M}_2$.

(c) $\mathcal{M}_1 \cup \mathcal{M}_2 \subseteq (\mathcal{M}_1 \cup \mathcal{M}_2) \setminus (\mathcal{M}_1 \cap \mathcal{M}_2)$.

(d) $\mathcal{M}_1 \in \mathcal{M}_2$.

(e) $1 \subseteq \mathcal{M}_1$.

(f) $\{1, \{3, 5\}\} \subseteq \mathcal{M}_2$.

(g) $\mathcal{M}_2 \in \mathfrak{P}(\mathcal{M}_1 \cup \mathcal{M}_2)$.

(h) $\mathcal{M}_1$ und $\mathcal{M}_2$ sind disjunkt.

(i) $\mathfrak{P}(\mathcal{M}_2 \setminus \mathcal{M}_1)$ und $\mathfrak{P}(\mathcal{M}_1)$ sind disjunkt.

(j) $\mathfrak{P}(\mathcal{M}_1) \subseteq \mathfrak{P}(\mathcal{M}_1 \cup \mathcal{M}_2)$.

1-B. Seien $M_1 := \mathbb{R}, M_2 := \mathbb{Z}, M_3 := \{x^2 : x \in \mathbb{R}\}, M_4 := [-2, 1]$ und $M_5 := \{0; 1; 2\}$. Bestimmen Sie folgende Mengen:
$M_1 \cup M_2$, $M_2 \cap M_3$, $M_3 \cup M_4$, $(M_4 \cap M_5) \cup M_2$, $(M_3 \cup M_4) \cap M_5$, $M_2 \setminus M_3$, $M_5 \setminus (M_4 \setminus M_3)$, $M_2 \setminus (M_1 \cap M_3)$, $\mathfrak{P}(M_5)$ und $\mathfrak{P}((M_5 \cap M_2) \setminus M_3)$.

1-C. Seien $M_1 := \{x \in \mathbb{R} : |x + 1| \leq |x|\}, M_2 := \{x \in \mathbb{R} : |x - 1| \leq 1\}$ und $M_3 := \left\{\sum_{k=1}^{n} k : n \in \mathbb{N}\right\}$. Bestimmen Sie folgende Mengen: $M_1 \cap M_2$, $M_1 \cup M_2$, $M_1 \setminus M_2$, $M_2 \setminus M_1$, $(M_1 \cap M_3) \setminus M_2$, $(M_3 \setminus M_1) \cap M_2$ und $\mathfrak{P}(M_2 \cap M_3)$.

1-D. Es seien M, N und P Mengen. Beweisen Sie die Gültigkeit folgender Aussagen:

(a) Falls $P \subseteq M$ und $P \subseteq N$ erfüllt sind, gilt $P \subseteq M \cap N$.

(b) Falls $M \subseteq P$ und $N \subseteq P$ erfüllt sind, gilt $M \cup N \subseteq P$.

(c) Falls $M \subseteq N$ und $N \subseteq P$ erfüllt sind, gilt $M \subseteq P$.

(d) Falls $M \subseteq N$ gilt, so sind auch $M \cap P \subseteq N \cap P$ und $M \cup P \subseteq N \cup P$ erfüllt.

1-Z. Seien M und N Mengen. Beweisen Sie, dass folgende Aussagen äquivalent sind:

(i) $M \subseteq N$.

(ii) $M \cap N = M$.

(iii) $M \cup N = N$.