Universität Leipzig WS2017/18
Mathematisches Institut
Prof. Dr. László Székelyhidi
Dr. Stefano Modena

**Partielle Differentialgleichungen I**
Blatt 5
Lösungen bitte zur Übung am 10. November 2017 mitbringen

**Aufgabe 17** (Maximumprinzip für elliptische Operatoren)**.** Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen und beschränkt. Betrachten Sie den Operator

$$Lu := \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x) D_{ij} u + \sum_{i=1}^n b_i(x) D_i u + c(x) u,$$

wobei $a_{ij}, b_i, c \in C(\bar{U})$ und $a_{ij} = a_{ji}$. Der Operator $L$ heißt *gleichmäßig elliptisch*, falls ein $\lambda > 0$ existiert so dass

$$\sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x)\xi_i \xi_j \geq \lambda |\xi|^2, \quad \text{für alle } x \in U \text{ und } \xi \in \mathbb{R}^n.$$

Sei $L$ ein gleichmäßig elliptischer Operator, sei $c(x) \leq 0$ für alle $x \in \bar{U}$ und sei $u \in C^2(U) \cap C(\bar{U})$. Beweisen Sie, dass, falls

$$-Lu \leq 0 \text{ in } U$$

und $u$ hat ein nichtnegatives Maximum in $\bar{U}$, dann das schwache Maximumprinzip

$$\max_{\bar{U}} u(x) \leq \max_{\partial U} u$$

gilt.

Hinweise: betrachten Sie zunächst den Fall $-Lu < 0$. In dem Fall $-Lu \leq 0$ betrachten Sie die Funktion $u(x) + \varepsilon v(x)$ für eine geeignet gewählte Funktion $v(x)$.

**Lösung.** Wir haben schon gesehen, dass das Maxmimumprinzip gilt, falls

$$Lu = \Delta u + \sum_i b_i(x) D_i u(x) + c(x) u(x).$$

Betrachten wir jetzt den allgemeinen Fall:

$$Lu := \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x) D_{ij} u + \sum_{i=1}^n b_i(x) D_i u + c(x) u,$$

Widerspruchannahme:

$$u(x_0) = \max_U u > \max_{\partial U} u, \qquad x_0 \in U.$$

Betrachten wir die symmetrische Matrix $A = (a_{ij}(x_0))_{ij}$. Da $A$ symmetrisch ist, existiert $M \in O(n)$ orthogonale Matrix und $D = \mathrm{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ Diagonalmatrix so dass

$$A = MDM^T.$$

Da

$$\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x_0)\xi_i\xi_j \geq \lambda|\xi|^2, \quad \text{für alle } \xi \in \mathbb{R}^n,$$

ist $A$ positiv definit und deswegen sind die Eigenwerte $\lambda_1, \dots, \lambda_n > 0$. Wir können dann die Matrix

$$\sqrt{D} := \mathrm{diag}(\sqrt{\lambda_1}, \dots, \sqrt{\lambda_n})$$

betrachten und die invertierbare Matrix $N := M\sqrt{D}$ definieren ($N$ ist invertierbar, da $M$ orthogonal ist und die Eigenwerte $\lambda_i > 0$ für $i = 1, \dots, n$). Es gilt

$$A = MDM^T = M\sqrt{D}\sqrt{D}M^T = (M\sqrt{D})(M\sqrt{D})^T = NN^T.$$

Sei $v(y) := u(Ny)$ und $y_0 := N^{-1}x_0$. Da $u$ das Maximum in $x_0$ erreicht, ist $v(y_0) = \max_{\bar{V}} v$, wo $V := N^{-1}(U)$. Es gilt

$$\Delta v(y) = \sum_{ij} D^2_{ij} u(Ny)(NN^T)_{ij} = \sum_{ij} a_{ij}(x_0) D^2_{ij} u(Ny).$$

Insbesondere

$$\Delta v(y_0) = \sum_{ij} a_{ij}(x_0) D^2_{ij} u(x_0) > -\sum_i b_i(x_0) D_i u(x_0) - c(x_0)u(x_0) \geq 0.$$

Deswegen ist $v$ subharmonisch in einer Umgebung von $y_0$, und das ist ein Widerspruch, da $v(y_0) = \max_V v$.

Betrachten wir jetzt den Fall $-Lu \leq 0$. Sei $w_\varepsilon(x) := u(x) + \varepsilon v(x)$, wobei

$$v(x) := e^{\alpha_1 x_1 + \cdots \alpha_n x_n} = e^{\alpha \cdot x} > 0,$$

und $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ wird später gewählt. Es gilt

$$\begin{aligned} Lv &= e^{\alpha \cdot x}\left[\sum_{ij} a_{ij}(x)\alpha_i\alpha_j + b(x)\cdot\alpha + c(x)\right] \\ \text{(da } L \text{ elliptisch ist)} &\geq e^{\alpha \cdot x}\left[\lambda|\alpha|^2 - \|b\|_{C(\bar{U})}|\alpha| - \|c\|_{C(\bar{U})}\right] \\ &> 0, \end{aligned}$$

falls $\alpha$ groß genug gewählt wird. Außerdem,

- da $u$ ein nichtnegatives Maximum in $\bar{U}$ hat und $v > 0$, hat auch $w_\varepsilon$ ein nichtnegatives Maximum in $\bar{U}$;
- $-Lw_\varepsilon = -Lu - \varepsilon Lv < 0$, da $Lv < 0$ und $\varepsilon > 0$.

Deswegen können wir den ersten Teil der Übung mit $w_\varepsilon$ verwenden und erhalten dann

$$\max_{\bar{U}} w_\varepsilon \leq \max_{\partial U} w_\varepsilon.$$

Deshalb für alle $x \in \bar{U}$,

$$u(x) \leq u(x) + \varepsilon v(x) = w_\varepsilon(x) \leq \max_{\partial U} w_\varepsilon(x) \leq \max_{\partial U} u + \varepsilon \max_{\partial U} v.$$

Sende $\varepsilon \to 0$, um den Beweis zu beenden.

**Aufgabe 18.** Zeigen Sie jeweils anhand Gegenbeispielen, dass die beiden Voraussetzungen

(i) $c(x) \leq 0$ in $\bar{U}$;

(ii) die Existenz von einem nichtnegativem Maximum in $\bar{U}$

in Aufgabe 17 notwendig sind.

**Lösung.** Sei $n = 1$.

(i) Sei $Lu = u'' + u$ und $u(x) = \sin x$ in $U = (0, \pi)$. $L$ ist elliptisch, $u$ hat ein nichtnegatives Maximum in $\bar{U}$ und $-Lu \leq 0$, aber das Maximumprinzip gilt nicht (da $c = 1 > 0$).

(ii) Sei $Lu = u'' - u$ und $u(x) = -e^x - e^{-x}$ in $U = (-1, 1)$. $L$ ist elliptisch, $c = -1 \leq 0$, und $-Lu \leq 0$, aber das Maximumprinzip gilt nicht (da $u$ kein nichtnegatives Maximum in $\bar{U}$ hat).

**Aufgabe 19.** Sei $U \subset \mathbb{C}$ offen und sei $f : U \to \mathbb{C}$ holomorph in $U$ und ohne Nullstellen. Zeigen Sie, dass $\log|f|$ harmonisch ist in $U$.

Hinweis: $f = u + iv$ ist holomorph (wobei $u : U \to \mathbb{R}$, $v : U \to \mathbb{R}$) genau dann, wenn $u, v$ die *Cauchy-Riemann Gleichungen*

$$\begin{cases} \partial_x u = \partial_y v, \\ \partial_y u = -\partial_x v \end{cases}$$

erfüllen.

**Lösung.** Die Cauchy-Riemann Gleichungen implizieren, dass

- $\nabla u = -(\nabla v)^\perp$, wobei falls $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$, ist $x^\perp := (x_2, -x_1)$;
- $|\nabla u| = |\nabla v|$;
- $\Delta u = \Delta v = 0$.

Sei $g(x) := \log|f| = \log((u^2 + v^2)^{1/2})$. Es gilt

$$\nabla g := (u^2 + v^2)^{-1}(u\nabla u + v\nabla v)$$

und

$$
\begin{aligned}
\Delta g &= \operatorname{div}(\nabla g) \\
&= -2(u^2+v^2)^{-2}\Big(u^2|\nabla u|^2 + 2uv\nabla u\cdot\nabla v + v^2|\nabla v|^2\Big) + (u^2+v^2)^{-1}\Big(|\nabla u|^2+|\nabla v|^2\Big) \\
&= -2(u^2+v^2)^{-2}\Big(u^2|\nabla u|^2 + v^2|\nabla v|^2\Big) + (u^2+v^2)^{-1}\Big(|\nabla u|^2+|\nabla v|^2\Big) \\
&= -2(u^2+v^2)^{-2}\Big(u^2+v^2\Big)|\nabla v|^2 + 2(u^2+v^2)^{-1}|\nabla v|^2 \\
&= 0.
\end{aligned}
$$

**Aufgabe 20.** Sei $U \subset \mathbb{R}^2$ offen, beschränkt, mit $C^1$ Rand, und seien $u, v \in C^1(\overline{U})$. Betrachten Sie die Funktion $f : U \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, definiert durch $f := u + iv$.

Zeigen Sie, dass

$$\int_{\partial U} f(z)\, dz = 2i \int_U \bar{\partial} f\, dxdy,$$

wobei $\bar{\partial} = \frac{1}{2}(\partial_x + i\partial_y)$. Folgern Sie, dass

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial U} \frac{f(z)}{z - z_0}\, dz - \frac{1}{\pi}\int_U \frac{\bar{\partial} f(z)}{z - z_0}\, dxdy$$

für alle $z_0 \in U$.

Hinweis: Ist $f : A \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ eine stetige Funktion und ist $\gamma : [\alpha, \beta] \to A$ eine $C^1$ Kurve in $A$, so ist das *Wegintegral* von $f$ entlang des Weges $\gamma$ definiert als

$$\int_\gamma f(z)dz := \int_\alpha^\beta f(\gamma(t)) \cdot \dot{\gamma}(t)dt,$$

wobei der Malpunkt komplexe Multiplikation bezeichnet.