

In den folgenden Aufgaben 1 – 2 kreuzen Sie in der jeweiligen Tabelle “W” an, falls Sie nach *sorgfältigem Lesen* die entsprechende Aussage für wahr halten, und “F” wenn Sie glauben, diese ist falsch.

Sie erhalten 2 Punkte für jedes richtige und –2 Punkte für jedes falsche Kreuz, 0 Punkte falls nichts angekreuzt wurde, aber keinesfalls weniger als Null Punkte für die beiden Aufgaben 1 und 2 zusammen.

Aufgabe 1)

- i) Jedes Mass ist auch ein äusseres Maß.
- ii) Jede kompakte Menge im $\mathbb{R}^n$, $n \geq 1$, ist eine Borelsche Menge.
- iii) Wenn $(X, \mathcal{A})$ ein Maßraum ist und $f : X \rightarrow (0, \infty)$ eine Funktion, so dass $x \rightarrow |f(x)|$ messbar ist, dann ist auch f messbar.
- iv) Wenn $f_n : \mathbb{R} \rightarrow [0, \infty)$ Lebesgue messbar sind und $f_n \geq f_{n+1}$, dann $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}} f_n d\lambda = \int_{\mathbb{R}} \lim_{n \rightarrow \infty} f_n d\lambda$.
- v) Sei $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ eine beliebige Lebesgue integrierbare Funktion. Dann ist $F(x) = \int_0^x \sqrt{|f(t)|} f(t) d\lambda(t)$ eine auf $[0, \infty]$ stetige Funktion.

	i)	ii)	iii)	iv)	v)
W					
F					

Aufgabe 2)

- i) Wenn $M \subset \mathbb{R}^n$ eine Lebesgue messbare Menge ist und $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ Lipschitz, dann ist auch $f(M)$ Lebesgue messbar.
- ii) Wenn $f : (0, 1)^2 \rightarrow \mathbb{R}$ lipschitz ist, dann gilt $\int_0^1 \int_0^1 f(x, y) dx dy = \int_0^1 \int_0^1 f(x, y) dy dx$.
- iii) Die Funktion $f(x, y) = 1 - \cos((|x| + |y|)^{-\alpha})$, $\alpha > 0$, ist integrierbar genau dann wenn $\alpha > 1$.
- iv) Die Länge L einer Kurve $c : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^n$ ist durch ihr Bild $c([0, 1])$ eindeutig bestimmt.
- v) Sei $U = \{(x, y) : 1 < x^2 + y^2 < 4\} \subset \mathbb{R}^2$ und $f : U \rightarrow U$ eine C^1 -Funktion, so dass $Df(z)$ für jedes $z \in U$ Rang zwei hat. Dann ist f ein Diffeomorphismus.

	i)	ii)	iii)	iv)	v)
W					
F					

Aufgabe 3) Die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ sei definiert durch

$$f(x, y) = xe^{-x^4y^2}(1 + \arctan(x^2 + y^4)).$$

Zeigen Sie, dass f Lebesgue messbar ist.

(3 Punkte)

Ist f über $\mathbb{R}^2$ bezüglich des Lebesguemaßes (endlich) integrierbar?

(5 Punkte)

Aufgabe 4) Beweisen Sie, dass für alle $x \in \mathbb{R}$

$$g(x) = \int_0^1 \frac{e^{-x^2(u^2+1)}}{u^2+1} du$$

existiert und dass $\lim_{x \rightarrow \infty} g(x) = 0$ gilt.

(3 Punkte)

Zeigen Sie, dass g auf $\mathbb{R}$ differenzierbar ist, und dass

$$g'(x) = -2e^{-x^2} \int_0^x e^{-t^2} dt \text{ für alle } x \in \mathbb{R}.$$

(4 Punkte)

Leiten Sie daraus (unter Betrachtung der Ableitung beider Seiten) her, dass

$$g(x) - g(0) = - \left(\int_0^x e^{-t^2} dt \right)^2 \text{ für alle } x > 0.$$

(3 Punkte)

Zeigen Sie, dass hieraus $\int_0^\infty e^{-t^2} dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$ folgt.

(2 Punkte)

Aufgabe 5) Die Abbildung $\varphi : (0, \sqrt{\frac{\pi}{2}}) \times (0, 1) \times (-1, 1) \rightarrow \mathbb{R}^3$ sei definiert durch

$$\varphi(x, y, z) = (\sin(x^2), y^2 \sin(x^2), z^3 \cos(2x^2))^T,$$

wir betrachten ihr Bild

$$M = \varphi((0, \sqrt{\frac{\pi}{2}}) \times (0, 1) \times (-1, 1)).$$

Finden Sie unter Benutzung der Transformationsformel das Lebesguemaß $\lambda(M)$. (6 Punkte)

Bestimmen Sie mittels des Satzes von Fubini das Lebesguemaß $\lambda(M)$. (4 Punkte)

Hinweis: Eine zweckdienliche Darstellung von M kann nützlich sein.

Aufgabe 6) Zeigen Sie, dass die Gleichung

$$e^{\sin(xy)} + x^2 - 2y = 1$$

in der Nähe von $x = 0$ eindeutig nach y aufgelöst werden kann.

(4 Punkte)

Sei die obige Lösung gegeben durch $y = g(x)$. Zeigen Sie, dass die Funktion g bei $x = 0$ einen kritischen Punkt hat. Klassifizieren Sie diesen.

(3 + 3 Punkte)