Mathematisches Institut
Universität Leipzig
Prof. Tanja Eisner

Leipzig, den 30. 10. 2017

Übungen zur Vorlesung

Analysis für Informatiker

Blatt 4

Man darf nicht das, was uns unwahrscheinlich und unnatürlich erscheint, mit dem verwechseln, was absolut unmöglich ist.
Carl Friedrich Gauss (1777-1855)

Aufgabe 1. (*Archimedisches Axiom, schriftlich,* 4 *Punkte*)

Zeigen Sie, dass die folgenden Aussagen äquivalent sind.

a) Für alle $R \in \mathbb{R}$ gibt es ein $n \in \mathbb{N}$ mit $n > R$.

b) Für alle $a, b > 0$ gibt es ein $n \in \mathbb{N}$ mit $na > b$.

c) Für alle $\varepsilon > 0$ gibt es ein $n \in \mathbb{N}$ mit $\frac{1}{n} < \varepsilon$.

Bemerkung: Sie können z.B. die Implikationskette a)$\Rightarrow$b)$\Rightarrow$c)$\Rightarrow$a) zeigen.

Aufgabe 2. (*Supremum und Infimum, a)+b) schriftlich,* 3 *Punkte, c)+d)* 3 *Zusatzpunkte*)

Bezeichne für Teilmengen M, N von $\mathbb{R}$ und $c \in \mathbb{R}$

$$cM := \{cx : x \in M\}, \quad M + N := \{x + y : x \in M, y \in N\}.$$

Zeigen Sie die folgenden Aussagen für beschränkte Mengen M und N aus $\mathbb{R}$. (Eine Teilmenge von $\mathbb{R}$ heißt *beschränkt*, wenn sie sowohl nach oben als auch nach unten beschränkt ist.)

a) $\sup(-M) = -\inf(M)$, $\inf(-M) = -\sup(M)$.

b) $\sup(cM) = c \sup M$ für alle $c \in \mathbb{R}_+$.

c) $\sup(M + N) = \sup M + \sup N$.

(Hinweis: Für $\leq$ zeigen Sie zuerst, dass $x + y \leq \sup M + \sup N$ für alle $x \in M$ und $y \in N$ gilt. Für $\geq$ zeigen Sie zuerst $\sup(M + N) \geq x + y$ für alle $x \in M$ und $y \in N$.)

d) $\sup(M - N) = \sup M - \inf N$.

Aufgabe 3. (*Abzählbarkeit, mündlich*)

a) Wenn A eine abzählbare Menge und B eine höchstens abzählbare Menge sind, dann ist $A \cup B$ abzählbar. Gilt die Aussage auch für $A \cap B$?

Bitte wenden!

b) Wenn A eine abzählbare Menge und B eine endliche Menge sind, dann ist $A \setminus B$ abzählbar. Gilt die Aussage auch für abzählbare Mengen B?

c) Seien $A_1, A_2, \dots$ abzählbare Mengen. Dann ist $\cup_{j=1}^{\infty} A_j$ abzählbar.

(Hinweis für a) und c): Nehmen Sie zuerst an, dass die Mengen paarweise disjunkt sind, d.h., keine zwei Mengen ein gemeinsames Element haben.)

Aufgabe 4. (*Konvergenz von Folgen, schriftlich,* 4 *Punkte*)

a) Sei $(a_n) \subset \mathbb{R}$ eine Folge mit $\lim_{n\to\infty} a_n = a$. Zeigen Sie $\lim_{n\to\infty} |a_n| = |a|$.
Gilt die Umkehrung?

b) (*Linearität des Limes*) Seien $c \in \mathbb{R}$ und $(a_n), (b_n) \subset \mathbb{R}$ mit $\lim_{n\to\infty} a_n = a$ und $\lim_{n\to\infty} b_n = b$. Dann gilt

$$\lim_{n\to\infty} (a_n + b_n) = a + b, \qquad \lim_{n\to\infty} c a_n = ca.$$

Gilt die Umkehrung?

Die schriftlich bearbeiteten Übungsaufgaben sind zusammengeheftet vor der Vorlesung am Montag, dem 6. 11. 2017 abzugeben.