Universität Leipzig
Mathematisches Institut
Prof. Dr. László Székelyhidi
Dr. Stefano Modena

WS2017/18

Partielle Differentialgleichungen I
Blatt 10
Lösungen bitte zur Übung am 15. Dezember 2017 mitbringen

Aufgabe 37. Sei $n = 1$, $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ beschränkt und stückweise stetig (d.h. stetig bis auf endlich viele Sprünge), und

$$u(x,t) = \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{(x-y)^2}{4t}} g(y)dy \qquad x \in \mathbb{R}, \quad t > 0.$$

Zeigen Sie, dass

$$\lim_{t\to 0} u(x,t) = \frac{1}{2}\big(g(x^+) + g(x^-)\big) \qquad \text{für alle } x \in \mathbb{R}.$$

Aufgabe 38 (Der Approximationssatz von Weierstraß)**.** Benutzen Sie die Darstellung der Lösung der eindimensionaler Wärmeleitungsgleichung in $\mathbb{R}$ als $u(x,t) = \int \Phi(x-y,t)g(y)\,dy$ um folgende Aussage zu beweisen:

Sei $f \in C([a,b])$; es existiert eine Folge von Polynomen $\{P_N(x)\}$ so dass $P_N(x) \to f(x)$ gleichmäßig auf $[a,b]$.

Hinweis: Definieren Sie eine geeignete Erweiterung $g \in BC(\mathbb{R})$ von f und betrachten Sie die dazugehörige Lösung $u(x,t)$.

Aufgabe 39. Betrachten Sie die Wärmeleitungsgleichung in $(-\pi,\pi)$ mit periodischen Randwerten:

$$\begin{aligned} \partial_t u - \partial_x^2 u &= 0 \quad \text{in } (-\pi,\pi)\times(0,\infty) \\ u(-\pi,t) &= u(\pi,t) \quad \text{für } t \geq 0 \\ u(x,0) &= f(x) \text{ für } x \in [-\pi,\pi], \end{aligned}$$

wobei $f \in C(\mathbb{R})$ periodisch ist, d.h. $f(x) = f(x+2\pi)$.

(i) Sei $u \in C_1^2(\mathbb{R}\times(0,\infty)) \cap C(\mathbb{R}\times[0,\infty))$ eine periodische Lösung, d.h. $u(x+2\pi,t) = u(x,t)$. Zeigen Sie, dass

$$u(x,t) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} a_k e^{ikx-k^2 t}$$

für Koeffizienten $a_k \in \mathbb{C}$, und schreiben Sie u in Form einer Faltung als $u(x,t) = \int_{-\pi}^{\pi} K(x-y,t)f(y)dy$.

(ii) Sei

$$\Psi(x,t) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \Phi(x+2\pi k,t) \qquad \text{für } x \in [-\pi,\pi] \text{ und } t > 0,$$

wobei Φ der Wärmeleitungskern in $\mathbb{R}$ ist. Zeigen Sie, dass $x \mapsto \Psi(x,t)$ zu $C^1(\mathbb{R})$ gehört und $2\pi-$periodisch ist für alle $t > 0$. Berechnen Sie die Fourierkoeffizienten von $\Psi(x,t)$ und folgern Sie, dass $\Psi(x,t) = K(x,t)$.

(iii) Zeigen Sie, dass für alle $t > 0$

$$\int_{-\pi}^{\pi} K(x,t)dx = 1 \text{ und } K(x,t) \geq 0.$$

(iv) Beweisen Sie, dass die Formel in (i) tatsächlich für jede $2\pi-$periodische Funktion $f \in C[-\pi,\pi]$ die Lösung des Anfangswertproblems ist (d.h. $u(x,t) \to f(x)$ mit $t \to 0$).

Hinweis: in (iv) schreiben Sie $K(x,t) = \Phi(x,t) + \mathcal{E}(x,t)$ mit $|\mathcal{E}(x,t)| \leq Ct^{-1/2}e^{-c/t}$ für $x \in [-\pi,\pi]$ und verwenden Sie den Beweis von Satz 57.