Universität Leipzig
Mathematisches Institut
Prof. Dr. László Székelyhidi
Dr. Stefano Modena

WS2017/18

Partielle Differentialgleichungen I
Blatt 4
Lösungen bitte zur Übung am 3. November 2017 mitbringen

Aufgabe 13. Sei $u \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$ und es gelte die Mittelwertungleichung

$$u(x) \le \fint_{B(x,r)} u(y)\,dy \quad \text{für fast alle } x \in \mathbb{R}^n \text{ und für alle } r > 0.$$

Zeigen Sie, dass $-\Delta u \le 0$ in $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$, d.h.

$$\int_{\mathbb{R}^n} u(x)(-\Delta\varphi)(x)dx \le 0 \quad \text{für alle } \varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n),\ \varphi \ge 0.$$

Hinweis: Untersuchen Sie zuerst den Spezialfall $u \in C^2(\mathbb{R}^n)$. Im allgemeinen Fall betrachten Sie die Regularisierung $u^\varepsilon = \eta_\varepsilon \star u$ mit $\varepsilon \to 0$.

Aufgabe 14. Sei $U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen und beschränkt, und für $x \in U$ sei $\phi^x \in C^2(U) \cap C(\bar{U})$ so dass

$$\begin{aligned} \Delta\phi^x(y) &= 0 \text{ in } U, \\ \phi^x(y) &= \Phi(x-y) \text{ auf } \partial U, \end{aligned}$$

wobei Φ das Newton'sche Potential ist. Zeigen Sie, dass die Funktion

$$(x, y) \mapsto \phi^x(y)$$

stetig ist auf $U \times U$.

Lösung. Fangen wir mit dieser Bemerkung an: falls $u \in C^2(U) \cap C(\bar{U})$ und u harmonisch ist, dann $\|u\|_{C(\bar{U})} \le \|u\|_{C(\partial U)}$. Der Beweis ist eine direkte Folgerung des Maximumprinzips.

Sei $(\bar{x}, \bar{y}) \in U \times U$. Wir wollen beweisen: für alle $\varepsilon > 0$ existiert $\delta > 0$ so dass

$$|\phi^{\bar{x}}(\bar{y}) - \phi^x(y)| < \varepsilon$$

falls

$$|x - \bar{x}| + |y - \bar{y}| < \delta.$$

Sei dann $\varepsilon > 0$. Wir haben

$$|\phi^{\bar{x}}(\bar{y}) - \phi^x(y)| \le |\phi^{\bar{x}}(\bar{y}) - \phi^{\bar{x}}(y)| + |\phi^{\bar{x}}(y) - \phi^x(y)|.$$

Die Funktion $y \mapsto \phi^{\bar{x}}(y)$ ist stetig auf $\bar{U}$. Deswegen existiert $\delta_1 > 0$ so dass

$$|\phi^{\bar{x}}(\bar{y}) - \phi^{\bar{x}}(y)| < \varepsilon/2$$

falls $|\bar{y} - y| < \delta_1$.

Betrachten wir jetzt die harmonische Funktion $U \ni y \mapsto \phi^{\bar{x}}(y) - \phi^x(y)$ für x "neben" $\bar{x}$. Wir haben für alle $y \in U$

$$|\phi^{\bar{x}}(y) - \phi^x(y)| \leq \|\phi^{\bar{x}} - \phi^x\|_{C(\bar{U})} \leq \|\phi^{\bar{x}} - \phi^x\|_{C(\partial U)} \leq \|\Phi(\bar{x} - \cdot) - \Phi(x - \cdot)\|_{C(\bar{U})}.$$

Die Funktion

$$\overline{B(\bar{x}, \eta)} \times \partial U \ni (x, y) \mapsto \Phi(x - y),$$

(für η so klein, dass $\overline{B(\bar{x}, \eta)} \subseteq U$) ist stetig auf einer kompakten Menge, deswegen ist gleichmäßig stetig. Insbesondere existiert $\delta_2 > 0$ so dass

$$|\Phi(\bar{x} - y) - \Phi(x - y)| < \varepsilon$$

für alle $x \in B(\bar{x}, \delta_2)$ und $y \in \partial U$. In anderen Wörtern

$$\|\Phi(\bar{x} - \cdot) - \Phi(x - \cdot)\|_{C(\partial U)} < \varepsilon.$$

Der Beweis ist komplett, indem wir $\delta := \min\{\delta_1, \delta_2\}$ wählen.

Aufgabe 15. Sei $u \in C^3(B(0,1)) \cap C(\overline{B(0,1)})$ und $\Delta u = 0$ in $B(0,1)$, und sei $\eta \in C_c^\infty(B(0,1))$ mit $\eta(0) = 1$.

(i) Zeigen Sie, dass $\lambda > 0$, unabhängig von u, geeignet gewählt werden kann, so dass die Funktion $w := \eta^2 |Du|^2 + \lambda |u|^2$

$$\Delta w \geq 0 \text{ in } B(0,1)$$

erfüllt.

(ii) Folgern Sie daraus die Abschätzung

$$|Du(0)|^2 \leq \lambda \max_{\partial B(0,1)} |u|^2.$$

Aufgabe 16. Seien $\alpha, \beta \in \mathbb{N}_0^n$ zwei Multiindizes, wobei $\mathbb{N}_0 = \{0, 1, 2, \dots\}$. Sei $q \in [0, 1)$. Beweisen Sie, dass

$$\sum_{\alpha \geq \beta} \frac{\alpha!}{(\alpha - \beta)!} q^{|\alpha - \beta|} = \frac{\beta!}{(1 - q)^{|\beta| + n}}.$$

Hinweis: Für einen Multiindex $\alpha \in \mathbb{N}^n$, $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$, sind

$$\alpha! := \alpha_1! \ \alpha_2! \cdots \alpha_n!,$$
$$|\alpha| := \alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_n.$$

Lösung. Es ist immer eine gute Idee, wenn wir ein schwieriges Problem haben, zunächst eine einfachere Version des Problems zu betrachten. In diesem Fall betrachten wir den Fall $n = 1$. Wir sollen die Gleichung

$$\sum_{k \geq k_0} \frac{k!}{(k - k_0)!} q^{k - k_0} = \frac{k_0!}{(1 - q)^{k_0 + 1}} \tag{6}$$

beweisen.

Wenn dieser Ausdruck noch schwierig ist, dann können wir zunächst den Ausdruck für $k_0 = 0$ gucken:

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{k!}{k!} q^k = \sum_{k=0}^{\infty} q^k = \frac{1}{1-q} \tag{7}$$

und natürlich ist (7) wahr (für $q \in [0, 1)$).

Für $k_0 = 1$ ist der Ausdruck (6)

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k!}{(k-1)!} q^{k-1} = \sum_{k=1}^{\infty} k q^{k-1} = \frac{1}{(1-q)^2}. \tag{8}$$

Es ist nicht schwierig, zu sehen, dass (8) von (7) erhalten werden kann, indem wir (7) nach q ableiten. Wenn wir noch eine Ableitung nach q nehmen, dann erhalten wir (6) für $k_0 = 2$

$$\sum_{k=2}^{\infty} \frac{k!}{(k-2)!} q^{k-2} = \sum_{k=2}^{\infty} k(k-1) q^{k-2} = \frac{2}{(1-q)^3}$$

und so weiter, durch vollständige Induktion, kann mann (6) für alle k_0 beweisen.

Betrachten wir jetzt die linke Seite von der Gleichung in beliebiger Dimension:

$$\begin{aligned}
&\sum_{\alpha \geq \beta} \frac{\alpha!}{(\alpha-\beta)!} q^{|\alpha-\beta|} \\
&\quad = \sum_{\alpha_1 \geq \beta_1} \sum_{\alpha_2 \geq \beta_2} \cdots \sum_{\alpha_n \geq \beta_n} \frac{\alpha_1! \alpha_2! \cdots \alpha_n!}{(\alpha_1-\beta_1)!(\alpha_2-\beta_2)! \cdots (\alpha_n-\beta_n)!} q^{(\alpha_1-\beta_1)+(\alpha_2-\beta_2)+\cdots+(\alpha_n-\beta_n)} \\
&\quad = \sum_{\alpha_1 \geq \beta_1} \frac{\alpha_1!}{(\alpha_1-\beta_1)!} q^{\alpha_1-\beta_1} \sum_{\alpha_2 \geq \beta_2} \frac{\alpha_2!}{(\alpha_2-\beta_2)!} q^{\alpha_2-\beta_2} \cdots \sum_{\alpha_n \geq \beta_n} \frac{\alpha_n!}{(\alpha_n-\beta_n)!} q^{\alpha_n-\beta_n}.
\end{aligned}$$

Für jeden Ausdruck

$$\sum_{\alpha_j \geq \beta_j} \frac{\alpha_j!}{(\alpha_j-\beta_j)!} q^{\alpha_j-\beta_j}$$

können wir den eindimensionalen Fall (6) verwenden und dann erhalten wir

$$\sum_{\alpha_j \geq \beta_j} \frac{\alpha_j!}{(\alpha_j-\beta_j)!} q^{\alpha_j-\beta_j} = \frac{\beta_j!}{(1-q)^{\beta_j+1}},$$

Deswegen

$$\begin{aligned}
\sum_{\alpha \geq \beta} \frac{\alpha!}{(\alpha-\beta)!} q^{|\alpha-\beta|} &= \frac{\beta_1!}{(1-q)^{\beta_1+1}} \cdot \frac{\beta_2!}{(1-q)^{\beta_2+1}} \cdot \cdots \cdot \frac{\beta_n!}{(1-q)^{\beta_n+1}} \\
&= \frac{\beta!}{(1-q)^{|\beta|+n}}.
\end{aligned}$$