

9. Übung zur Vorlesung Analysis
für Grund-, Mittel- und Förderschullehramt

Mathematisches Institut, Universität Leipzig

Dozent: Dr. Jan-David Hardtke

Ausgabe: Freitag, 8.12.2017

Abgabe: Freitag, 15.12.2017 bis **spätestens** 12:00 Uhr im Postfach Hardtke im Raum A 514 oder im Anschluß an die Donnerstagsvorlesung (verspätete Abgaben werden nicht bewertet).

Wichtig: Alle Abgaben sind mit Namen, Matrikelnummer, Übungstermin und Namen des Übungsleiters zu versehen. Die Übungen müssen **selbstständig** bearbeitet werden (keine Partnerabgabe).

Aufgabe 1 (1+1+1+1 Punkte). Berechnen Sie die Ableitungen der folgenden Funktionen. Geben Sie ihren Rechenweg mit an und vereinfachen Sie das Ergebnis noch so weit wie möglich.

$$\begin{aligned} (a) \quad f(x) &= x^x \quad \text{für } x > 0 & (b) \quad f(x) &= \sqrt{\sqrt{x} + \sqrt{x+1}} \quad \text{für } x > 0 \\ (c) \quad f(x) &= \frac{\sin(\cos(2^x))}{x^2} \quad \text{für } x \neq 0 & (d) \quad f(x) &= x^2 e^{3x} \log(\log(x)) \quad \text{für } x > 1 \end{aligned}$$

Aufgabe 2 (1+1+2 Punkte).

1) Sei $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ eine Funktion, die an der Stelle $x_0 \in \mathbb{R}$ differenzierbar ist. Zeigen Sie:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0 - h)}{2h} = f'(x_0).$$

2) Geben Sie ein Beispiel (mit Beweis) für eine Funktion $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ und eine Stelle $x_0 \in \mathbb{R}$, so dass der Limes aus 1) existiert, aber f an der Stelle x_0 nicht differenzierbar ist.

3) Sei wieder $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ eine Funktion. Angenommen es existieren reelle Zahlen $\alpha > 1$ und $L \geq 0$ mit

$$|f(x) - f(y)| \leq L|x - y|^\alpha \quad \text{für alle } x, y \in \mathbb{R}.$$

Zeigen Sie, dass f konstant ist.

Aufgabe 3 (2+2 Punkte). Sei $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definiert durch

$$f(x) := \frac{e^x}{x^2 + \frac{3}{4}} \quad \text{für alle } x \in \mathbb{R}.$$

- 1) Bestimmen Sie die erste und zweite Ableitung von f .
- 2) Untersuchen Sie f auf lokale Extrema (berechnen Sie ggf. auch die Funktionswerte an den Extremstellen).

Aufgabe 4 (2+2 Punkte).

Sei $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definiert durch $f(x) := \sin(x) \cos(x/2) + \cos(x)$ für $x \in \mathbb{R}$.

- 1) Bestimmen Sie das zweite Taylor-Polynom von f mit Entwicklungspunkt 0, d. h. $T_{2,0}^f$.
- 2) Beweisen Sie die Abschätzung

$$|f(x) - T_{2,0}^f(x)| \leq \frac{35}{48} |x|^3 \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$