Grundlagen der Mathematik
Übungsaufgaben
Serie 6

Hinweis

Bitte vermerken Sie auf jedem Blatt Ihren Namen und Ihre Matrikelnummer. Geben Sie ferner an, an welchem Wochentag und zu welcher Uhrzeit Ihre Übung stattfindet. Geben Sie Ihre Lösungen bis **Montag, 20.11.2017**, 14:45 Uhr im Hörsaal 6 oder im Postfach von S. Hintze in der 5. Etage des Neuen Augusteums ab.

Aufgabe 1

Untersuchen Sie zunächst, ob für $b, c \in \mathbb{N}$ der Nachfolger von $b \cdot c + b + c$ eine Primzahl sein kann. Finden Sie anschließend alle geordneten Paare natürlicher Zahlen (b, c), für die gilt: (5P)

$$b \cdot c + b + c = 2013.$$

Aufgabe 2

Beweisen Sie die folgende Aussage mithilfe eines Beweises durch Widerspruch.
Gegeben sei eine natürlich Zahl a, für deren Darstellung im Dezimalsystem n-mal die Ziffer 1 $(n \in \mathbb{N}; n \geq 2)$ und keine andere Ziffer verwendet wird, d.h. es soll

$$a = \underbrace{11\ldots1}_{\text{n-Mal}}$$

gelten. Dann ist a keine Quadratzahl, d.h. es gibt kein $k \in \mathbb{N}$ mit $k^2 = a$. (5P)
Hinweis: Nutzen Sie die aus der Schule bekannten Teilbarkeitsregeln.

Aufgabe 3

Zeigen Sie zuerst, dass die Aussage A wahr ist.

A: Sei $n \in \mathbb{N}$. Wenn n^2 gerade ist, dann ist n^2 durch 4 teilbar.

Beweisen Sie die folgende Aussage mithilfe eines Beweises durch Widerspruch. Nutzen Sie dafür die Aussage A.
Wenn $a, b \in \mathbb{N}$ zwei ungerade Zahlen sind, dann ist $a^2 + b^2$ keine Quadratzahl, d.h. es gibt kein $l \in \mathbb{N}$ mit $l^2 = a^2 + b^2$. (5P)

Aufgabe 4

Sei $p \in \mathbb{N}$ eine Primzahl und es gelte $p > 3$. Zeigen Sie, dass stets gilt: (5P)

$$24 | (p^2 - 1).$$