

Übungen zur Vorlesung
Analysis für Informatiker
Blatt 13

Es ist nicht das Wissen, sondern das Lernen, nicht das Besitzen, sondern das Erwerben, nicht das Dasein, sondern das Hinkommen, was den größten Genuß gewährt.

CARL FRIEDRICH GAUSS (1777-1855)

Aufgabe 1. (*Taylor- und Maclaurinreihen, Satz von Taylor, a) 4 Zusatzpunkte, b) und c) jeweils 1 Zusatzpunkt*)

a) Zeigen Sie die Maclaurinreihendarstellung

$$\ln(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} x^n = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots$$

für alle $x \in (-1, 1]$. Konvergiert die Reihe für $x > 1$?

(Bemerkung: Diese Darstellung liefert insbesondere $\ln 2 = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots$)

b) Entwickeln Sie die Funktion $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^3$ in die Taylorreihe im Entwicklungspunkt $x_0 := 3$.

c) Sei $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ $(n+1)$ -mal differenzierbar mit $f^{(n+1)}(x) = 0$ für alle $x \in (a, b)$. Zeigen Sie, dass f ein Polynom höchstens n -ten Grades ist.

Aufgabe 2. (*Partielle Ableitungen, 3 Zusatzpunkte*)

Bestimmen Sie die partiellen Ableitungen der Funktionen $f, g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ und $h : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ gegeben durch

$$f(x, y) = x e^{xy^2}, \quad g(x, y) = 5x^6 - 3x^4 y^2 + y^8, \quad h(x, y, z) := x \sin(yz - x).$$

Aufgabe 3. (*Treppenfunktionen und Integral, a) 3 Zusatzpunkte, b) 2 Zusatzpunkte*)

Zeigen Sie die folgenden Eigenschaften des Integrals.

a) Das Integral von Treppenfunktionen ist linear und monoton:

1) Für $\varphi, \psi \in T[a, b]$ gelten $\varphi + \psi \in T[a, b]$ und $\int_a^b (\varphi + \psi) = \int_a^b \varphi + \int_a^b \psi$.

2) Für $\varphi \in T[a, b]$ und $\lambda \in \mathbb{R}$ gelten $\lambda\varphi \in T[a, b]$ und $\int_a^b (\lambda\varphi) = \lambda \int_a^b \varphi$.

3) Für $\varphi, \psi \in T[a, b]$ mit $\varphi(x) \leq \psi(x)$ für alle $x \in [a, b]$ gilt $\int_a^b \varphi \leq \int_a^b \psi$.

b) Zeigen Sie, dass jede Funktion $f \in T[a, b]$ sich als Summe $f = c + g$ darstellt, wobei c konstant in $[a, b]$ ist und $g \in T[a, b]$ Integral Null hat.

Die schriftlich bearbeiteten Übungsaufgaben sind zusammengeheftet vor der Vorlesung am Montag, dem 22. 1. 2018 abzugeben.