

ÜA Funktionalanalysis 1 - 7. Serie

1. (mündlich)

Sei $k : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ eine stetige Funktion. Zeigen Sie, dass durch

$$(Tf)(x) = \int_0^x k(x, t)f(t) dt$$

ein kompakter Operator $T : C[0, 1] \rightarrow C[0, 1]$ definiert wird.

2. (schriftlich)

Sei $1 \leq p \leq \infty$, $a = (a_n) \in \ell_\infty$ und

$$M_a(x) := (a_n x_n) \quad \text{für } x = (x_n) \in \ell_p.$$

Geben Sie eine notwendige und hinreichende Bedingung an die Folge $a = (a_n)$ an, so dass der Multiplikationsoperator $M_a : \ell_p \rightarrow \ell_p$ kompakt ist. (Natürlich ist das Ergebnis zu begründen.)

3. (schriftlich)

Zeigen Sie in den folgenden beiden Fällen, dass φ ein stetiges lineares Funktional auf dem Raum X definiert und berechnen Sie jeweils seine Norm.

(a) $X = c_0$, $\varphi(x) := \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n} x_n$

(b) $X = C[0, 2]$, $\varphi(f) := \int_0^1 f(t)dt - \int_1^2 f(t)dt$

Zusatz (mündlich): Zeigen Sie, dass diese Funktionale ihre Norm nicht annehmen, d.h. es existiert kein $x \in X$ mit $|\varphi(x)| = 1 = \|x\|$.

4. (mündlich)

Bestimmen Sie alle stetigen linearen Funktionale auf dem Raum c der konvergenten Folgen (mit der sup-Norm) und zeigen Sie, dass der Dualraum von c isometrisch isomorph zu ℓ_1 ist.

Abgabe vor der Vorlesung am Dienstag, dem 05.12.2017

Klausurtermin: Freitag, 2.2.2018, Beginn 13.15 Uhr, Hörsaal 8