Analysis 1

Serie 9

Abgabe: 14.12. in den Briefkästen im Raum A514

Aufgabe 1 (Punkte: 4). Seien $I_j \subset \mathbb{R}$ Intervalle mit $I_j = [a_j, b_j]$ mit $j = 0, ..., n$. Zeige durch vollständige Induktion

$$I_0 \setminus \left(\bigcup_{j=1}^{n} I_j \right) = \emptyset \Rightarrow b_0 - a_0 \leq \sum_{j=1}^{n} (b_j - a_j).$$

Aufgabe 2 (Punkte: 2+2+2). Es bezeichne $\overline{M}$ den Abschluss und $\mathring{M}$ das Innere einer Menge M.

(a) Sei $M \subset \mathbb{R}$ beschränkt. Zeige $\sup(M) = \max(\overline{M})$.

(b) Finde eine äquivalente Bedingung für $\max(\overline{M}) = \sup(\mathring{M})$.

(c) Gib $\sup \left\{ x | xy^2 < 0, \, (x, y) \in \mathbb{R}^2 \right\}$ an.

Aufgabe 3 (Punkte: 2+2+2). Sind die folgenden Mengen kompakt?

$$\begin{aligned} M_1 &= \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, x^2 + 4y^2 \leq 1 \right\} \\ M_2 &= \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, x^2 \leq 4y \right\} \\ M_3 &= \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, x + y \leq 0, \, x^2 + y^2 < 1 \right\} \end{aligned}$$

Aufgabe 4 (Punkte: 2+2+2). Es sei

$$M_k := \bigcup_{i \in \mathbb{Z}} (2^{-k} i - 4^{-k-1}, 2^{-k} i + 4^{-k-1})$$

und

$$M := \bigcup_{k \in \mathbb{N}} M_k.$$

(a) Gib $\mathring{M}$ und $\overline{M}$ an.

(b) Gilt $[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}] \setminus M = \emptyset$?

(c) Gilt $[-\frac{1}{4}, \frac{1}{4}] \setminus M = \emptyset$?

Aufgabe 5 (Punkte: 2+2+4). (Diese Aufgabe kann am 4.Januar 2018 mit Serie 10 abgegeben werden).
Seien M_k, M wie in Aufgabe 4 und $a, b \in \mathbb{R}$. Wir setzen $\chi_k : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit

$$\chi_k(x) = \begin{cases} 1, & \text{für } x \in M_k \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

und

$$g_k = a\chi_k + b\chi_{k+1}$$

sowie

$$h_k = \chi_{k+1} \cdot \prod_{j=0}^{k} (1 - \chi_j).$$

(a) Ist g_k stetig in M? Ist g_k stetig in M_k? Ist g_k stetig in M_{k+1}?

(b) Ist $f_j := \sum_{k=0}^{j} 2^{-k} h_k$ stetig in M? Ist f_j stetig in M_k? Ist f_j stetig in $\mathbb{R}$?

(c) Gib die Punkte $x \in \mathbb{R}$ an, wo $f(x) = \lim\limits_{j \to \infty} f_j(x)$ nicht stetig ist.