Wintersemester 17/18 Prof. Dr. J.S. Wilson

ALGEBRA I

Sylvesterblatt

Diese Aufgaben sind alle optionell. Die Aufgaben sind von unterschiedlichem Schwierigkeitsgrad und einige setzen mathematische Kenntnisse voraus, die nicht in der Algebra I vermittelt werden. Alle Studenten, insbesondere die denen noch Punkte zum Erreichen der Zulassung zur Klausur fehlen, können bis zum 3. Januar 2017 Lösungen einreichen: diese sind wie üblich in den Briefkasten einzuwerfen. Jede Aufgabe wird mit 3 Punkten bewertet.

Aufgabe S.1. Sei p eine Primzahl.

(a) Beschreiben Sie die Sylow p-Untergruppen der symmetrischen Gruppen S_p und S_{p+1}. Wieviele Sylow p-Gruppen haben diese Gruppen?

(b) Sei die Gruppe G endlich mit genau $p+1$ Sylow p-Gruppen der Ordnung p^n. Beweisen Sie, dass G einen Normalteiler der Ordnung p^{n-1} besitzt. [Hinweis: wie wirkt G auf den Sylow p-Untergruppen?]

Aufgabe S.2. (a) Sei G endlich mit einer zyklischen Sylow 2-Gruppe $P = \langle h \rangle \neq 1$. Beschreiben Sie die Zykelzerlegung von h in der Wirkung von P auf G durch Multiplikation ($(x, g) \mapsto xg$ für $x \in P, g \in G$).

(b) Folgern Sie, dass G eine Untergruppe G_1 vom Index 2 hat. Zeigen Sie, dass G_1 die einzige Untergruppe vom Index 2 ist. Folgern Sie durch Induktion, dass G ein Normalteiler vom Index $|P|$ hat.

Aufgabe S.3. Sei K ein Körper und $n \geqslant 2$. Wir schreiben K^* für die multiplikative Gruppe $K \setminus \{0\}$ und $\mathrm{GL}_n(K)$ für die Gruppe aller $n \times n$ invertierbaren Matrizen mit Einträgen aus K.

(a) Zeigen Sie, dass $\det\colon \mathrm{GL}_n(K) \to K^*$ ein surjektiver Homomorphismus ist.

Der Kern wird $\mathrm{SL}_n(K)$ geschrieben.

(b) Zeigen Sie, dass $\mathrm{C}_{\mathrm{GL}_n(K)}(\mathrm{SL}_n(K)) = \{\lambda I_n \mid \lambda \in K^*\}$, wo I_n der $n \times n$ Einsmatrix ist.

(c) Zeigen Sie weiter, dass $\mathrm{Z}(\mathrm{SL}_n(K)) = \{\lambda I_n \mid \lambda^n = 1\}$ ist, eine zyklische Gruppe deren Ordnung n teilt.

[$\mathrm{SL}_n(K)/(\mathrm{Z}(\mathrm{SL}_n(K))$ wird $\mathrm{PSL}_n(K)$ geschrieben. Für $n \geqslant 3$, und auch für $n = 2$ mit $|K| \geqslant 4$, ist $\mathrm{PSL}_n(K)$ einfach.]

Aufgabe S.4. Sei jetzt K ein endlicher Körper der Ordnung q. Wir schreiben $\mathrm{GL}_n(q)$ anstatt $\mathrm{GL}_n(K)$, usw.

(a) Gegeben $u \in K^n \setminus \{0\}$, wieviele Elemente $v \in K^n$ gibt es mit $\{u, v\}$ linear unabhängig? Wieviele geordnete Basen hat K^n?

(b) Zeigen Sie, dass

$$|\mathrm{GL}_n(q)| = q^{\frac{1}{2}n(n-1)}(q^n - 1)(q^{n-1} - 1) \dots (q - 1).$$

(c) Zeigen Sie, dass $|\mathrm{PSL}_2(4)| = |\mathrm{PSL}_2(5)| = 60$. Also, von früheren Blättern sind diese Gruppen zu A_5 isomorph.

(d) Was ist die Ordnung von $\mathrm{GL}_2(7)$?

[$\mathrm{PSL}_2(7)$ ist die 'nächste' einfache Gruppe nach A_5, dann kommt A_6.]

Aufgabe S.5. (a) Beweisen Sie, dass für eine endliche Gruppe G, die Folgenden äquivalent sind:

(i) G ist nilpotent;
(ii) jede maximale Untergruppe von G enthält $[G, G]$;
(iii) falls $H \leqslant G$ und $[G, G]\, H = G$ dann ist $H = G$.

(b) Zeigen Sie dass eine endliche Gruppe G mit einem Normalteiler K derart, dass K sowohl auch $G/[K, K]$ nilpotent ist, selbst nilpotent ist.

Aufgabe S.6. (a) Sei G eine Gruppe und H_1, H_2 abelsche Normalteiler mit $G = H_1H_2$. Beweisen Sie, dass G nilpotent der Klasse höchstens 2 ist.

(b) Folgern Sie von (a), (S.5) und Induktion, dass eine endliche Gruppe, die ein Produkt von zwei nilpotenten Normalteilern ist, selbst nilpotent ist.

(c) Beweisen Sie, dass jede endliche Gruppe G einen nilpotent Normalteiler besitzt, der alle nilpotenten Normalteiler enthält.

Aufgabe S.7. Formulieren Sie den ersten Isomorphiensatz für Ringe.

Sei D der Ring aller differenzierbaren Funktionen $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, wobei das Produkt fg zweier Elemente $f, g \in D$ durch $fg(z) = f(z)g(z)$ und Addition wie gewöhnlich definiert ist. Sei $I = \{f \in D \mid f(0) = f'(0) = 0\}$.

Zeigen Sie, dass $I \triangleleft D$, dass es einen surjektiven Homomorphismus $\mathbb{R}[x] \to D/I$ gibt, und dass $D/I \cong \mathbb{R}[x]/(x^2)$.

Aufgabe S.8. Sei die ganze Zahl n quadratfrei. Beweisen Sie:

(a) für $n < -1$ ist $U(\mathbb{Z}[\sqrt{n}\,]) = \{\pm 1\}$;
(b) für $n > 1$ ist $U(\mathbb{Z}[\sqrt{n}\,])$ unendlich;
(c) $U(\mathbb{Z}[\sqrt{2}]) = \{\pm(1+\sqrt{2})^m \mid m \in \mathbb{Z}\}$.

Aufgabe S.9. Sei R der Ring $C[0, 1]$ der stetigen Funktionen $[0, 1] \to \mathbb{R}$ (mit Operationen wie in (S.7)).

(a) Sei $I = \{f \in R \mid f(x) = 0 \text{ für } 0 \leqslant x \leqslant \frac{1}{2}\}$. Zeigen Sie, dass I ein Ideal ist. Zu welchem Ring ist R/I isomorph?

(b) Zeigen Sie, dass für $0 \leqslant x \leqslant 1$ die Menge M_x der Abbildungen f mit $f(x) = 0$ ein maximales Ideal von R ist. Beweisen Sie, dass alle maximalen Ideale von der Form M_x sind.

Aufgabe S.10. Zeigen Sie, dass die Gleichung $x^2 + 2 = y^3$ keine Lösung mit $x, y \in \mathbb{Z}$ ausser $x = \pm 5$, $y = 3$ hat. [Berechnen Sie im Ring $\mathbb{Z}[\sqrt{-2}]$.]