Analysis 1

Serie 5

Abgabe: 16.11. in den Briefkästen im Raum A514

Aufgabe 1 (Punkte: 2)**.** Zeige, auch unter Berücksichtigung des Falles einer unbeschränkten Folge, dass für jede monoton wachsende reelle Folge gilt, dass

$$\liminf_{n\to\infty} a_n = \limsup_{n\to\infty} a_n.$$

Aufgabe 2 (Punkte: 2+2+2+2)**.** Seien $k, l \in \mathbb{N}$ mit $0 < k < l$.

(a) Zeige

$$\sum_{n=k}^{l} \frac{1}{n^2} \leq \frac{1}{k^2} + \frac{1}{k} - \frac{1}{l}.$$

(b) Zeige, dass

$$\sum_{n=k}^{l} \frac{1}{n^2} \geq \frac{1}{k} - \frac{1}{l+1}.$$

(c) Es gilt $a_n := \sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k^2}$ ist eine konvergente Folge mit positivem Grenzwert.

(d) Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt

$$a_n \leq \lim_{k\to\infty} a_k \leq a_n + \frac{1}{n+1}.$$

Aufgabe 3 (Punkte: 2+2+4)**.** *(a)* Leite mit Hilfe der binomischen Formel die Lösungen a, b der Gleichung

$$(a+ib)^2 = c + id$$

her.

(b) Gib die Lösungen von

$$(a+ib)^2 = 1 + i\sqrt{3}$$

an.

(c) Bestimme a, b so, dass
$$(a + ib)^3 = c + id,$$
wobei $c, d \in \mathbb{R}$ mit $c^2 + d^2 = 1$ beliebig sind.

Aufgabe 4 (Punkte: 6)**.** Die komplexe Folge x_n sei induktiv definiert durch

$$x_{n+1} = \begin{cases} x_n - a\frac{x_n^3 - z}{x_n^2}, & \text{für } x_n \neq 0 \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

Dabei ist $a \in \mathbb{R}_+$ und $z \in \mathbb{C}$. Leite Bedingungen an x_0 und a her, sodass die Folge $x_n \neq 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und
$$b_n = |1 - \frac{z}{x_n^3}|$$
eine monoton fallende Nullfolge ist.