Mathematisches Institut
Universität Leipzig
Prof. Tanja Eisner

Leipzig, den 11. 12. 2017

Übungen zur Vorlesung

Analysis für Informatiker

Blatt 10

Vergesst nicht: wenn ihr schwimmen lernen wollt, dann geht mutig ins Wasser.
Wenn ihr lernen wollt, Aufgaben zu lösen, dann löst sie.
George Pólya (1887-1985)

Aufgabe 1. (*Zwischenwertsatz, a) 1 Punkt, b) und c) jeweils 2 Punkte*)

Zeigen Sie die folgenden Aussagen mit Hilfe des Zwischenwertsatzes.

a) Seien $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig mit $f(a) < g(a)$ und $f(b) > g(b)$. Dann gibt es ein $x_0 \in (a, b)$ mit $f(x_0) = g(x_0)$.

b) (Existenz von Wurzeln) Sei $a > 0$ und $n \in \mathbb{N}$. Dann existiert ein $x_0 > 0$ mit $x_0^n = a$. (Hinweis: Betrachten Sie die Funktion $f : [0, 1 + a] \to \mathbb{R}$ mit $f(x) := x^n - a$.)

c) (Fixpunktsatz) Sei $f : [a, b] \to [a, b]$ stetig. Dann besitzt f einen *Fixpunkt*, d.h., es gibt ein $x_0 \in [a, b]$ mit $f(x_0) = x_0$. Was bedeutet diese Aussage graphisch? (Hinweis zum ersten Teil: Benutzen Sie a) mit einer geeigneten Funktion g.)

Aufgabe 2. (*Existenz reeller Nullstellen von bestimmten Polynomen, 4 Zusatzpunkte*)

Sei $p : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ein Polynom ungeraden Grades, d.h., p ist von der Form

$$p(x) = a_0 + a_1 x + \ldots + a_{2k+1} x^{2k+1}$$

mit $a_{2k+1} \neq 0$. Zeigen Sie, dass p mindestens eine reelle Nullstelle hat, d.h., es gibt ein $x_0 \in \mathbb{R}$ mit $p(x_0) = 0$. Kann man die Voraussetzung an den Grad des Polynoms weglassen? (Hinweis zum ersten Teil: Nehmen Sie zuerst an, dass $a_{2k+1} > 0$ gilt, und zeigen Sie $\lim_{n\to\infty} p(n) = +\infty$ und $\lim_{n\to\infty} p(-n) = -\infty$, indem Sie n^{2k+1} ausklammern.)

Aufgabe 3. (*Punktweise und gleichmäßige Konvergenz, a) und b) jeweils 2 Punkte*)

Untersuchen Sie die folgenden Funktionenfolgen $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ auf punktweise und gleichmäßige Konvergenz.

a) $f_n : [0, 1] \to \mathbb{R}$, $f_n(x) := (1 + \frac{1}{n})x^n$. (Bemerkung: Eine Skizze kann hilfreich sein.)

b) $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f_n(x) := \sqrt{x^2 + \frac{1}{n}}$. (Hinweis: Benutzen Sie die Formel $a - b = \frac{a^2-b^2}{a+b}$ für $a \neq -b$.)

Bitte wenden!

Aufgabe 4. (*Grenzwerte von Fuktionen, 2 Punkte*)

Berechnen Sie (mit Begründung) den links- und rechtsseitigen Grenzwert an der Stelle $a = 1$ der Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$f(x) := \begin{cases} \frac{x^2-1}{x-1}, & x < 1, \\ 0, & x = 1, \\ 4 - 2x, & x > 1. \end{cases}$$

Begründen Sie anhand dieser Grenwerte, ob f an der Stelle 1 stetig oder unstetig ist. (Bemerkung: Eine Skizze kann hilfreich sein.)

Die schriftlich bearbeiteten Übungsaufgaben sind zusammengeheftet vor der Vorlesung am Montag, dem 18. 12. 2017 abzugeben.