9. Übungsblatt zu "Mathematik I für Wirtschaftswissenschaftler"

Leipzig, den 4.12.2017

33.) Ermitteln Sie für die Werte $\frac{\pi}{6}$, $\frac{\pi}{4}$, $\frac{\pi}{3}$ die Funktionswerte für die 4 Funktionen *sin*, *cos*, *tan* und *cotan*. – Insgesamt sind also *12* Funktionswerte zu berechnen.
Dabei ist *kein* Taschenrechner zu benutzen; statt dessen soll die Berechnung der Ergebnisse mittels geometrischer Überlegungen erfolgen.

34.) Ein Bankkunde zahlt zu Beginn jedes der 3 kommenden Jahre jeweils einen Betrag von 16384 Euro ein. Bestimmen Sie denjenigen Diskontsatz d_*, für den der hiermit gebildete Barwert genau 48009 Euro beträgt.

Hinweis: Sie müssen die quadratische Gleichung $16384 \cdot (1 + a(d) + a^2(d)) = 48009$ lösen, wobei $a(d) = \frac{1}{1+d_*}$ ist.

35.) Untersuchen Sie, ob die folgenden Funktionen auf $\mathbb{R}$ stetig sind:

i) $f_1(x) := \sqrt{x^2+1}$ für $x < 1$, $f_1(x) := \sqrt{x^2-1}$ für $x \geq 1$.

ii) $f_2(x) := 0$ für $x \leq 0$, $f_2(x) := e^{-\frac{1}{x}}$ für $x > 0$.

iii) $f_3(x) := \frac{sin(x)}{x}$ für $x \neq 0$, $f_3(0) = 1$.

36.) Es seien $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$. Eine Funktion $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ heißt *Lipschitz-stetig*, wenn es ein $C > 0$ gibt, so dass für alle $x, y \in [a, b]$ gilt:

$$|f(y) - f(x)| \leq C \cdot |y - x|.$$

i) Beweisen Sie: Ist $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ Lipschitz-stetig, so ist f auch gleichmäßig stetig – und folglich auch stetig.

ii) Definiere $w : [0, 1] \to [0, 1]$ durch: $w(x) := \sqrt{x}$. Beweisen Sie, dass w *nicht* Lipschitz-stetig ist.

iii) Zeigen Sie direkt, dass die Funktion w wie in ii) gleichmäßig stetig ist, indem Sie explizit zu jedem $\epsilon > 0$ ein $\delta > 0$ angeben, so dass für alle $x, y \in [a, b]$ mit $|y - x| < \delta$ gilt: $|\sqrt{y} - \sqrt{x}| < \epsilon$.

Hinweise zu ii) und iii): Für alle $x, y \in [0, 1]$ gilt: $(\sqrt{y} - \sqrt{x}) \cdot (\sqrt{y} + \sqrt{x}) = y - x$.
Betrachten Sie in ii) Zahlen x, y, die nur geringfügig größer sind als 0.
In iii) können Sie annehmen: $x < y$. Untersuchen Sie getrennt die Fälle $y < \epsilon^2$; $y \geq \epsilon^2$.