Übungsblatt 3

1) Sei $(X, \mathcal{A}, \mu)$ ein Maßraum. Zeigen Sie
   a) Wenn $(A_i)_{i=1}^\infty \subset \mathcal{A}$ und $A \in \mathcal{A}$, dann folgt aus $A \subset \bigcup_{i=1}^\infty A_i$ dass $\mu A \leq \sum_{i=1}^\infty \mu A_i$. [*Hinweis: Zeigen Sie zuerst* $B \subset C \Rightarrow \mu B \leq \mu C$ *und betrachten Sie* $M_i = (A \cap A_i) \setminus \bigcup_{j<i} A_j$.]
   b) Wenn $(A_i)_{i=1}^\infty \subset \mathcal{A}$ und $A_i \subset A_{i+1}$ dann $\mu(\bigcup_{i=1}^\infty A_i) = \lim_{i\to\infty} \mu A_i$. [*Hinweis: Betrachten Sie* $B_i = A_i \setminus A_{i-1}$.]
   c) Wenn $(A_i)_{i=1}^\infty \subset \mathcal{A}$, $A_i \supset A_{i+1}$ und $\mu(A_1) < \infty$ dann $\mu(\bigcap_{i=1}^\infty A_i) = \lim_{i\to\infty} \mu A_i$.
   d) Ist c) ohne die letzte (zusätzliche) Voraussetzung gültig?

6 Punkte

2) Sei $(A_i)_{i=1}^\infty$ eine Folge von Mengen. Wir bezeichnen mit $\limsup_{i\to\infty} A_i$ die Menge aller Punkte, die für unendlich viele i in A_i sind, und mit $\liminf_{i\to\infty} A_i$ die Menge aller Punkte, die für alle bis auf endlich viele i in A_i sind.

   Welche der beiden folgenden Formeln bezeichnet $\limsup_{i\to\infty} A_i$ und welche $\liminf_{i\to\infty} A_i$? Begründen Sie Ihre Antwort.
$$\bigcup_{i=1}^\infty \bigcap_{j=i}^\infty A_j \quad , \quad \bigcap_{i=1}^\infty \bigcup_{j=i}^\infty A_j.$$
   Sei nun $(X, \mathcal{A}, \mu)$ ein endlicher Maßraum, d.h. $\mu(M) < \infty$. Zeigen Sie
$$\mu(\liminf_{i\to\infty} A_i) \leq \liminf_{i\to\infty} \mu(A_i) \leq \limsup_{i\to\infty} \mu(A_i) \leq \mu(\limsup_{i\to\infty} A_i),$$
   und belegen Sie durch Beispiele, dass alle Ungleichungen scharf sein können. Welche Ungleichung gilt nicht mehr, wenn wir die Voraussetzung $\mu(X) < \infty$ weglassen?

$6 + 1^*$ Punkte

3) Sei (X, ϱ) ein metrischer Raum, und $M \subset X$ wird als metrischer Unterraum $(M, \varrho_{|M\times M})$ betrachtet.
   a) Zeigen Sie, dass $U \subset M$ in $(M, \varrho_{|M\times M})$ offen ist gdw. es ein $G \subset X$ offen in (X, ρ) gibt, so dass $U = G \cap M$. [*Hinweis: Betrachten Sie* $G = \bigcup\{B(x,r) : x \in M \ \& \ B(x,r) \cap M \subset U\}$.]
   b) Zeigen Sie, dass $\{A \cap M : A \in Bor(X, \varrho)\}$ eine σ-Algebra auf M ist und schließen Sie aus a), dass diese $Bor(M, \varrho_{|M\times M})$ enthält.
   c) Beweisen Sie, dass $\{A \subset X : A \cap M \in Bor(M, \varrho_{|M\times M})\}$ eine σ-Algebra auf X ist, die $Bor(X, \varrho)$ enthält, und schlußfolgern Sie also nachstehende Relativierungsformel für Borelsche Mengen:
$$\{A \cap M : A \in Bor(X, \varrho)\} = Bor(M, \varrho_{|M\times M}).$$

3+2+3 Punkte

4) a) Sei $A \subset [0,1]$. Beweisen Sie, dass A Lebesgue-messbar ist ($A \in \mathfrak{M}_\lambda$) genau dann wenn $\lambda(A) + \lambda([0,1] \setminus A) = 1$.

b) Finden Sie ein äusseres Maß μ auf der Menge $X = \{1, 2, 3\}$ mit $\mu(X) < \infty$, so dass das Resultat von a) nicht gilt, d.h. es gibt ein $A \subset X$ mit $A \notin \mathfrak{M}_\mu$ obwohl $\mu(X) = \mu(A) + \mu(X \setminus A)$.

c) Sei μ ein beliebiges äusseres Maß auf dem $\mathbb{R}^d$ und $M \subset \mathbb{R}^d$ eine lokale Nullmenge, dass heisst für jedes $x \in M$ gibt es ein $\varepsilon > 0$ mit $\mu(B(x, \varepsilon) \cap M) = 0$. Zeigen Sie, dass $\mu(M) = 0$. 5+4*+2 Punkte

Wie immer gilt: begründen Sie Ihre Aussagen sorgfältig!

Abgabe am 1.11.2014, 9.10 Uhr Hörsaal 5