Grundlagen der Mathematik
Übungsaufgaben
Serie 2

Hinweis

Bitte vermerken Sie auf jedem Blatt Ihren Namen und Ihre Matrikelnummer. Geben Sie ferner an, an welchem Wochentag und zu welcher Uhrzeit Ihre Übung stattfindet. Geben Sie Ihre Lösungen bis Mittwoch, 25.10.2017, 10:45 Uhr im Hörsaal 6 oder im Postfach von S. Hintze in der 5. Etage des Neuen Augusteums ab.

Aufgabe 1

Seien $\varphi : A \to B$ eine Abbildung und M_1 und M_2 Teilmengen von A.
Zeigen Sie, dass

$$\varphi(M_1 \cup M_2) = \varphi(M_1) \cup \varphi(M_2)$$

gilt. (5P)

Aufgabe 2

Untersuchen Sie, ob es sich bei den Verknüpfungen $\circ$ jeweils um innere Verknüpfungen auf den gegebenen Mengen handelt.

a) Sei R die Menge aller natürlicher Zahlen, die bei der Division durch 4 den Rest 1 lassen, d.h.

$$R = \{4k+1 |\ k \in \mathbb{N}_0\} = \{1, 5, 9, 13, \ldots\}$$

Für alle $a, b \in R$ sei $a \circ b = a \cdot b$, wobei $\cdot$ die aus der Menge der natürlichen Zahlen $\mathbb{N}$ bekannte Multiplikation ist. (2P)

b) Sei T die Menge aller natürlicher Zahlen, die durch 7 teilbar sind, d.h.

$$T = \{7k |\ k \in \mathbb{N}\} = \{7, 14, 21, 28, \ldots\}$$

Für alle $a, b \in T$ sei $a \circ b = a + b$, wobei $+$ die aus der Menge der natürlichen Zahlen $\mathbb{N}$ bekannte Addition ist. (2P)

c) Sei G die Menge aller Gitterpunkte des ersten Quadranten, also die Menge aller Punkte der Ebene, deren Koordinaten natürliche Zahlen sind, d.h.

$$G = \{(m, n) |\ m, n \in \mathbb{N}\}$$

Für alle $P, Q \in G$ sei $P \circ Q = M$, wobei M der Mittelpunkt der Strecke $\overline{PQ}$ ist. (2P)

bitte wenden

d) Sei S die Menge aller Quadratzahlen, d.h.

$$S = \{k^2 \mid k \in \mathbb{N}\} = \{1, 4, 9, 16, \ldots\}$$

Für alle $a, b \in S$ sei $a \circ b = a \cdot b$, wobei $\cdot$ die aus der Menge der natürlichen Zahlen $\mathbb{N}$ bekannte Multiplikation ist. (2P)

Aufgabe 3

Mit Hilfe von Wahrheitstafeln können kompliziertere logische Ausdrücke untersucht werden.

a) Geben Sie die Wahrheitstafel für die Aussage $(\neg A \vee B) \leftrightarrow \neg B$ an. (2P)

In der Alltagssprache treten bei „wenn ... dann“-Konstruktionen oftmals Widersprüche zur Logik auf. Sagt beispielsweise ein Vater zu seiner Tochter: „Wenn du dein Zimmer nicht aufräumst, darfst du nicht Sportschau gucken.“, wird diese Vereinbarung häufig folgendermaßen interpretiert: Wenn die Tochter ihr Zimmer aufräumt, dann darf sie die Sportschau gucken. Im Gegensatz zur Altagssprache sind diese beiden Implikationen in der Logik nicht äquivalent.

b) Zeigen Sie mit Hilfe von Wahrheitstafeln, dass $A \to B$ nicht äquivalent zu $\neg A \to \neg B$ ist. (2P)

c) Geben Sie die Negation der Aussage „Wenn du dein Zimmer nicht aufräumst, dann darfst du keine Sportschau gucken.“ an. (1P)

d) In den folgenden beiden Ausageformen steht x für eine Person. Die Aussageform $S(x)$ bedeutet „x schaut gerade Sportschau.“ Die Aussageform $T(x)$ bedeutet „x telefoniert gerade.“ Formulieren Sie die folgenden Aussagen in Worten. (1P)

A_1: $\neg(\exists x : (S(x) \wedge T(x)))$

A_2: $\forall x : (S(x) \to \neg T(x))$