

12. Übungsblatt zu “Mathematik I für Wirtschaftswissenschaftler”

Leipzig, den 8.1.2018

45.) Aus einem Material soll ein Zylinder mit der Oberfläche 225 cm^2 so konstruiert werden, dass sein Volumen so groß wie möglich ist. Bestimmen Sie den Radius, die Höhe und das Volumen dieses Zylinders.

46.) Es seien $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$, und $f, g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ seien – beliebige – reelle Funktionen. Verifizieren Sie, dass für alle $x \in [a, b]$ gilt:

$$\max(f(x), g(x)) = \frac{1}{2} \cdot (f(x) + g(x) + |g(x) - f(x)|);$$

$$\min(f(x), g(x)) = \frac{1}{2} \cdot (f(x) + g(x) - |g(x) - f(x)|).$$

Insbesondere folgt: Sind f und g stetig, so sind auch die Funktionen $\max(f, g)$ und $\min(f, g)$ stetig. Siehe hierzu auch Korollar 5.4.

Hinweis:

Untersuchen Sie für fixiertes $x \in [a, b]$ getrennt die Fälle $f(x) \leq g(x)$ und $f(x) > g(x)$.

47.) Beweisen Sie Satz 5.4:

Es sei $f_k : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ eine Folge von Regelfunktionen auf einem Intervall $[a, b]$, und $h : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ sei eine Funktion mit

$$|h(x) - f_k(x)| \leq \frac{1}{k} \text{ für alle } k \in \mathbb{N} \text{ und alle } x \in [a, b].$$

Dann ist auch h eine Regelfunktion.

48.) Definiere $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ durch $f(x) := x^2$. Definiere ferner für $k \in \mathbb{N}$ die Treppenfunktion $t_k : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ durch

$$t_k(0) := 0; \quad t_k(x) := \left(\frac{a}{k}\right)^2, \text{ falls } 0 < x \leq 1 \text{ und } a \in \{1, \dots, k\} \text{ ist mit } \frac{a-1}{k} < x \leq \frac{a}{k}.$$

Berechnen Sie $\int_0^1 t_k(x) dx$ für alle $k \in \mathbb{N}$; dazu sollte Aufgabe 8i) benutzt werden.

Verifizieren Sie weiter: $|f(x) - t_k(x)| \leq \frac{2}{k}$ für alle $k \in \mathbb{N}$, und berechnen Sie schließlich $\int_0^1 f(x) dx$ durch Grenzübergang. – Zu der letzten Berechnung sollen also noch nicht die üblichen Integrationsregeln verwendet werden; es bietet sich aber natürlich eine entsprechende Probe an.