2. Freiwillige Zusatzübung zur Vorlesung Analysis
für Grund-, Mittel- und Förderschullehramt

Mathematisches Institut, Universität Leipzig

Dozent: Dr. Jan-David Hardtke

Ausgabe: Donnerstag, 18.01.2018
Abgabe: **Dienstag, 30.01.2018** bis **spätestens** 13:00 Uhr im Postfach Hardtke im Raum A 514 oder im Anschluß an die **Dienstagsvorlesung** (verspätete Abgaben werden nicht bewertet).

Wichtig: Alle Abgaben sind mit Namen, Matrikelnummer, Übungstermin und Namen des Übungsleiters zu versehen. Die Übungen müssen **selbstständig** bearbeitet werden (keine Partnerabgabe).

Diese Übung geht nicht in die reguläre Wertung ein. Sie können hier bis zu 16 Zusatzpunkte sammeln.

Aufgabe 1 (2+2 Punkte)**.**
1) Sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall und seien $f, g : I \to \mathbb{R}$ stetige Funktionen. Sei $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0, 1\}$. Es sei z eine differenzierbare Funktion auf I mit $z(t) > 0$ für alle $t \in I$. Wir setzen $y(t) := (z(t))^{1/(1-\alpha)}$ für $t \in I$. Zeigen Sie: y erfüllt die sogenannte *Bernoulli-Differentialgleichung*

$$y'(t) = f(t)y(t) + g(t)(y(t))^{\alpha} \quad \text{für } t \in I$$

genau dann, wenn

$$z'(t) = (1-\alpha)(f(t)z(t) + g(t)) \quad \text{für } t \in I$$

gilt.
2) Bestimmen Sie eine Lösung der Differentialgleichung

$$y'(t) = -y(t) - e^{t}(y(t))^{3} \quad \text{für } t \geq 0$$

mit der Anfangsbedingung $y(0) = 1/2$.

Aufgabe 2 (1+2+1 Punkte)**.**
Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine differenzierbare Funktion. Wir betrachten die sogenannte *Clairautsche Differentialgleichung*

$$y(t) = ty'(t) + f(y'(t)). \tag{1}$$

1) Zeigen Sie: Für alle $c \in \mathbb{R}$ definiert $y_c(t) := ct + f(c)$ eine Lösung von (1).
2) Angenommen $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ist eine differenzierbare Funktion mit $f'(g(t)) = -t$ für alle $t \in \mathbb{R}$. Sei $y(t) := tg(t) + f(g(t))$ für alle $t \in \mathbb{R}$. Zeigen Sie, dass y ebenfalls eine Lösung von (1) ist.
3) Bestimmen Sie eine *nichtlineare* Lösung der Differentialgleichung

$$y(t) = ty'(t) + (y'(t))^2.$$

Aufgabe 3 (2+2 Punkte)**.**
1) Zeigen Sie

$$\arctan(x) + \arctan(1/x) = \begin{cases} \pi/2 \text{ für } x > 0, \\ -\pi/2 \text{ für } x < 0. \end{cases}$$

2) Zeigen Sie

$$\arcsin(x) + \arccos(x) = \frac{\pi}{2}$$

für alle $x \in [-1, 1]$.
(Hinweis: Leiten Sie jeweils die linke Seite nach x ab.)

Aufgabe 4 (2+2 Punkte)**.** Berechnen Sie die folgenden Grenzwerte mit Hilfe der l'Hospitalschen Regeln (begründen Sie insbesondere, warum diese angewendet werden dürfen).

(a) $\lim_{x \to 0^+} \frac{\cos(x) - 1}{\sqrt{x}}$ $\qquad$ (b) $\lim_{x \to 0^+} \frac{x^2 \sin(1/\sqrt{x})}{\sin(x)}$