ÜA Funktionalanalysis 1 - 3. Serie

1. (mündlich)

   Beweisen Sie:
   Jede präkompakte Teilmenge eines metrischen Raumes ist separabel.

2. (mündlich)

   Sei T eine unendliche Menge. Zeigen Sie: Der Banachraum $(B(T), \|.\|_\infty)$ der beschränkten Funktionen $f : T \to \mathbb{R}$ ist inseparabel.

3. (schriftlich)

   (a) Beweisen Sie: Jede Teilmenge eines separablen metrischen Raumes ist separabel.

   (b) Geben Sie explizit eine abzählbare dichte Teilmenge der irrationalen Zahlen an.

4. (schriftlich)

   Seien $0 < \alpha \leq 1$ und $L > 0$ beliebige Konstanten. Beweisen Sie:

   Wenn eine Funktion $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ die α-Hölder-Bedingung

   $$|f(x) - f(t)| \leq L \cdot |x - t|^\alpha \quad \text{für alle } x, t \in [0,1]\,.$$

   erfüllt, dann gilt für ihre Bernsteinpolynome $B_n f$ die Abschätzung

   $$\|B_n f - f\|_\infty \leq L \cdot (4n)^{-\alpha/2}\,.$$

   Hinweis: Modifizieren Sie den Beweis aus der Vorlesung mit Hilfe der Hölderschen Ungleichung.

Abgabe vor der Vorlesung am Dienstag, dem 07.11.2017