

Übungen zur Vorlesung
Analysis für Informatiker
Blatt 12

Man kann beim Studium der Wahrheit drei Hauptziele haben: einmal, sie zu entdecken, wenn man sie sucht; dann: sie zu beweisen, wenn man sie besitzt; und zum letzten: sie vom Falschen zu unterscheiden, wenn man sie prüft.

BLAISE PASCAL (1623–1662)

Aufgabe 1. (*Mittelwertsatz, a) 1 Punkt, c) 2 Punkte*)

Zeigen Sie die folgenden Ungleichungen mit Hilfe des Mittelwertsatzes.

- a) $\sin x \leq x$ für alle $x \geq 0$.
- b) $1 - \frac{1}{x} < \ln x < x - 1$ für alle $x > 1$.
(Betrachten Sie den Logarithmus auf dem Intervall $[1, x]$.)

Aufgabe 2. (*Monotonie und lokale Extrema, a) 6 Punkte, b) 4,5 Zusatzpunkte*)

- a) Untersuchen Sie mit Hilfe der Differentialrechnung, wo die folgenden Funktionen monoton sind, und finden Sie ihre lokalen Extrema.
 - 1) $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \frac{1}{3}x^3 - 3x^2 + 5x + 1$.
 - 2) $f : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = x + \frac{1}{x}$.
 - 3) $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = e^{-x^2}$.
- b) Skizzieren Sie die Graphen der in a) untersuchten Funktionen. Welche lokalen Extrema der Funktionen sind global? (Hinweis: Bestimmen Sie die Werte der Funktionen in den Extrempunkten und die Grenzwerte als $x \rightarrow \pm\infty$ bzw. $x \rightarrow 0$.)

Aufgabe 3. (*Nullstellen, 2 Zusatzpunkte*)

Zeigen Sie, dass das Polynom $p : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definiert durch

$$p(x) = x^5 + 7x^3 + 5x - 10$$

genau eine reelle Nullstelle hat, d.h., es gibt genau ein $a \in \mathbb{R}$ mit $p(a) = 0$.

(Hinweis: Benutzen Sie den Zwischenwertsatz für stetige Funktionen, um zu zeigen, dass p mindestens eine Nullstelle hat.)

Aufgabe 4. (*Regel von de L'Hospital, 2 Punkte*)

Berechnen Sie die folgenden Grenzwerte:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{2x}, \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \sin x}{x^3}.$$

Die schriftlich bearbeiteten Übungsaufgaben sind zusammengeheftet vor der Vorlesung am Montag, dem 15. 1. 2018 abzugeben.