

Partielle Differentialgleichungen I

Blatt 12

Lösungen bitte zur Übung am 12. Januar 2018 mitbringen

Aufgabe 45. Sei $u \in C^2(\mathbb{R} \times \mathbb{R})$ mit $\partial_t^2 u - \partial_x^2 u = 0$. Zeigen Sie die Identität

$$u(x+h, t+k) + u(x-h, t-k) = u(x+k, t+h) + u(x-k, t-h)$$

für alle $x, t, h, k \in \mathbb{R}$.

Aufgabe 46. Sei $g \in C_c^2(\mathbb{R}^n)$ und $u \in C^2(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R})$ eine Lösung der Wellengleichung

$$\begin{aligned} \partial_t^2 u - \Delta u &= 0 & \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \\ u &= g & t = 0 \\ \partial_t u &= 0 & t = 0, \end{aligned}$$

mit u und $\partial_t u$ beschränkt. Sei

$$v(x, t) = \frac{1}{(4\pi t)^{1/2}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{s^2}{4t}} u(x, s) ds.$$

Zeigen Sie, dass v die Lösung der Wärmeleitungsgleichung

$$\begin{aligned} \partial_t v - \Delta v &= 0 & \mathbb{R}^n \times (0, \infty) \\ v &= g & t = 0 \end{aligned}$$

ist.

Aufgabe 47 (Die Kirchhoff'sche Formel für $n = 3$). Sei $g \in C^2(\mathbb{R}^3)$ und

$$u(x, t) := t \int_{\partial B(x, t)} g(y) dS(y).$$

Zeigen Sie, dass

- (i) $u \in C^2(\mathbb{R}^3 \times (0, \infty))$,
- (ii) $\partial_t^2 u - \Delta u = 0$ in $\mathbb{R}^3 \times (0, \infty)$.
- (iii) falls g kompakten Träger hat, dass

$$|u(x, t)| \leq \frac{C}{t} \quad \text{in } \mathbb{R}^3 \times (0, \infty),$$

für ein $C > 0$.

Hinweis zu (ii): Zeigen Sie, dass $\partial_t \int_{\partial B(x, t)} g = \int_{\partial B(x, t)} \partial_\nu g$ und benutzen Sie die Green'sche Identität.

Aufgabe 48 (Die Poisson'sche Formel für $n = 2$). Sei $g \in C^2(\mathbb{R}^2)$ und

$$u(x, t) := \frac{1}{2\pi} \int_{B(x, t)} \frac{g(y)}{(t^2 - |x - y|^2)^{1/2}} dy.$$

Zeigen Sie, dass, falls g kompakten Träger hat,

(i) für jedes $x \in \mathbb{R}^2$ ein C_x existiert so dass

$$|u(x, t)| \leq \frac{C_x}{t} \quad \text{für } t > 0.$$

(ii) eine Konstante $C > 0$ existiert so dass

$$|u(x, t)| \leq \frac{C}{t^{1/2}} \quad \text{in } \mathbb{R}^2 \times (0, \infty),$$

Hinweis zu (ii): Zeigen Sie, dass ein $C > 0$ existiert so dass

$$\sup_x \int_{B(0,1) \cap B(x,\varepsilon)} \frac{1}{\sqrt{1 - |y|^2}} dy \leq C\varepsilon^{3/2}.$$