ÜA Funktionalanalysis 1 - 10. Serie

1. (schriftlich)
   Eine lineare Abbildung $L : \ell_\infty \to \mathbb{R}$ heißt *Banachlimes*, wenn sie folgende Eigenschaften besitzt:
   (1) $L(Sx) = L(x)$ für alle $x \in \ell_\infty$, wobei $S : \ell_\infty \to \ell_\infty$ der Shift-Operator auf ℓ_∞ ist, $S(x_1, x_2, x_3, ...) = (x_2, x_3, x_4 ...)$
   (2) $L(x) \geq 0$ für alle $x \in \ell_\infty$ mit $x_n \geq 0 \ \forall n$
   (3) $L(e) = 1$ für $e = (1, 1, 1, ...)$

   Beweisen Sie:

   (a) Es gibt einen Banachlimes.
   Anleitung: Man zeige, dass die algebraische Variante des Satzes von Hahn-Banach im Fall $X = \ell_\infty$, $U = \{x - Sx : x \in \ell_\infty\}$, $\ell(u) = 0$, $p(x) = \sup x_n$, anwendbar ist.

   (b) Jeder Banachlimes L ist stetig mit $\|L\| = 1$, und es gilt
   $$\varliminf_{n\to\infty} x_n \leq L(x) \leq \varlimsup_{n\to\infty} x_n \quad \text{für alle } x \in \ell_\infty ,$$
   also insbesondere $\quad L(x) = \lim\limits_{n\to\infty} x_n \quad$ für alle $x \in c$.
   Hinweis: Beim Beweis von (b) darf man nicht die Konstruktion unter (a) verwenden, sondern nur die Eigenschaften (1)–(3).

   (c) Kein Banachlimes kann von der Form $\ L(x) = \sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k x_k \ $ sein.

2. (mündlich)
   Beweisen Sie: Wenn X ein normierter Raum mit strikt konvexem Dualraum ist, dann hat jedes stetige lineare Funktional auf einem linearen Teilraum U von X *genau eine* normerhaltende Fortsetzung auf den ganzen Raum X.

3. (mündlich)
   Zeigen Sie, dass die Supremumsnorm auf $C[0, 1]$ nicht strikt konvex ist, und konstruieren Sie eine äquivalente strikt konvexe Norm.

Abgabe: vor der Vorlesung am Dienstag, dem 9. Januar 2018

* *

FROHE WEIHNACHTEN und einen
GUTEN RUTSCH INS NEUE JAHR !

* *