Übungsblatt 11- Leichtezusatzpunkteweihnachtsserie

1) Möge $(X, \mathfrak{A}, \mu)$ ein Maßraum sein. Zeigen Sie,
   a) wenn $f : X \to [0, \infty]$ $\mathfrak{A}$-messbar ist, und $\int f\, d\mu < \infty$, dann hat die Menge $\{x \in X : f(x) > 0\}$ notwendigerweise σ-endliches μ-Maß, d.h. es existieren $M_i \in \mathfrak{A}$ mit $\mu M_i < \infty$ und $\{f > 0\} \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} M_i$.
   b) falls $X = \mathbb{N}$, $\mathfrak{A} = \mathcal{P}(\mathbb{N}) = 2^{\mathbb{N}}$ und $\mu(M) = \sum_{n \in M} n!$ dann gibt es eine $\mathfrak{A}$-messbare Funktion $f : X \to (0, \infty)$ mit $\int f\, d\mu < \infty$.
   c) wenn, wieder im allgemeinen Maßraum $(X, \mathfrak{A}, \mu)$ die Funktion $f : X \to [0, \infty]$ $(\mathfrak{A})$-messbar ist, und X σ-endliches μ-Maßhat, dann gilt

$$\int f\, d\mu = 0 \Leftrightarrow f = 0 \quad \mu\text{-fast überall.}$$

   Bleibt diese Implikation auch richtig, wenn wir die σ-Endlichkeit nicht voraussetzen? $2^* + 2^* + 1^*$ Punkte

2) Benutzen Sie das Archimedes-Intergral und den Satz von Fubini-Tonelli, um die Integrale $J = \int_{\mathbb{R}^2} e^{-\|z\|^2}\, d\mathcal{L}(z)$ und daraus $I = \int_{\mathbb{R}} e^{-t^2} d\mathcal{L}(t)$ zu bestimmen. (Hier $\|(x, y)\|^2 = x^2 + y^2$.) Begründen Sie Ihre Ergebnisse sorgfältig! $3^* + 1^*$ Punkte

3) **Newton-Verfahren** Im Folgenden untersuchen wir das Newton Verfahren, bzw eine Simplifizierung. Wir betrachten dabei eine zweimal stetig differenzierbar Funktion $f : (a, b) \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x_0 \in (a, b)$ mit $f(x_0) = 0$ und die rekursiv definierten Folgen $(x_k)_{k=1}^{\infty}$ und $(y_k)_{k=1}^{\infty}$, wobei wir annehmen, dass diese in (a, b) liegen. (Bei konkreter Anwendung der Verfahren ist diese Annahme zusätzlich zu prüfen!) Seien $c = \inf_{x \in (a,b)} |f'(x)| > 0$ und $d = \sup_{x \in (a,b)} |f''(x)| < \infty$.
   a) Zeigen Sie, wenn

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)},$$

   dann gilt $|x_{n+1} - x_0| \leq \frac{d}{2c}|x_n - x_0|^2$. Leiten Sie daraus her, dass $\lim_n x_n = x_0$ wenn x_1 nahe genug an x_0 gewählt wurde, und dass die Anzahl $A(n)$ der "korrekten Stellen" von x_n, d.h. die größte Zahl, so dass $|x_n - x_0| \leq 10^{-A(n)}$, sich asymptotisch zumindest verdoppelt, d.h. $\liminf_{n \to \infty} \frac{A(n+1)}{A(n)} \geq 2$. 3^* Pkte
   b) Um ständiges Differenzieren zu vermeiden, betrachten wir das vereinfachte NV

$$y_{n+1} = y_n - f(y_n)/f'(y_F),$$

   wobei y_F ein fixer Punkt in (a, b) ist. Zeigen Sie, falls $|f'(y_F)| > d(b - a)$, dann konvergiert für jede Wahl von $y_1 \in (a, b)$ die Folge $(y_n)_n$ gegen x_0 und die Zahl der korrekten Stellen wächst zumindest linear mit n . 2^* Punkte
   Welches einfachere Verfahren konvergiert auch "linear"?

Abgabe **ebenfalls** am 03.01.2018, 9.10 Uhr in Hörsaal 5

Frohes Fest und gutes 2018!