Notiztitel 23.11.2017

Satz (Umordnungssatz für abs. konv. Reihen)

Sei $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ abs. konv. und $\varphi: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ bij. Dann konv. $\sum_{n=1}^{\infty} a_{\varphi(n)}$ abs. und $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} a_{\varphi(n)}$.

(D.h., man kann a_n in beliebiger Reihenfolge aufsummieren.)

Bew. – ohne.

Satz (Cauchyprodukt von Reihen)

Seien $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$, $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ abs. konv. und def.

$$\boxed{c_n := a_0 b_n + a_1 b_{n-1} + \dots + a_n b_0} = \sum_{i+j=n} a_i \cdot b_j$$

d.h., i,j mit $i+j=n$

Dann konv. $\sum_{n=0}^{\infty} c_n$ abs. und

$$\boxed{\sum_{n=0}^{\infty} c_n = \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n\right) \cdot \left(\sum_{n=0}^{\infty} b_n\right)}$$

Bem. D.h., $\left(\sum_{0}^{\infty} a_n\right)\left(\sum_{0}^{\infty} b_n\right) = \underbrace{a_0 \cdot b_0}_{c_0} + \underbrace{(a_0 b_1 + a_1 b_0)}_{c_1} + \underbrace{(a_0 b_2 + a_1 b_1 + a_2 b_0)}_{c_2} + \dots$

Bew. benutzt den Umordnungssatz – ohne (Tutorium?)

Zum Schluss: Achtung: Wenn man endlich viele a_n verändert, ändert sich die Konvergenz / abs. Konv. nicht

aber die Summe der Reihe ändert sich schon.

3. Potenzreihen

Sei $D \subset \mathbb{R}$ und $\forall n \in \mathbb{N}$ sei $f_n : D \to \mathbb{R}$ gegeben.
Dann heißt $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ eine Funktionenfolge und $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ eine Funktionenreihe. Dabei ist die Reihe punktweise def. als $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ für $x \in D$ und, falls diese Reihen alle konv., stellt sie eine Fkt $: D \to \mathbb{R}$ dar. Analog für $\mathbb{N}_0$ statt $\mathbb{N}$ usw.

Bsp $\sum_{n=0}^{\infty} x^n$: $f_n(x) = x^n$, $D = (-1,1)$, konv. $\forall x \in D$.

Bsp (Exponentialreihe bzw. Pkt) und $0! = 1$

für $f_n(x) = \frac{x^n}{n!}$, $x \in \mathbb{R}$, betrachte

$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$. Die Reihe konv. abs. $\forall x \in \mathbb{R}$

z.B. nach dem Quotientenkrit.: $\left| \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} \cdot \frac{n!}{x^n} \right| = \left| \frac{x}{n+1} \right| \xrightarrow{n \to \infty} 0$

(für $x \neq 0$, $x = 0$ – klar)

Man kann zeigen:

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \dots$$

Die Eigenschaft $e^x \cdot e^y = e^{x+y}$ folgt aus dem Cauchyprodukt für Reihen:

$$e^x \cdot e^y = \sum_{n=0}^{\infty} c_n$$

wobei

$$c_n = \sum_{i+j=n} \frac{x^i}{i!} \cdot \frac{y^j}{j!} = \frac{1}{n!} \sum_{i+j=n} \frac{n!}{i! \cdot j!} x^i y^j$$

$$= \frac{1}{n!} \sum_{k=0}^{n} \frac{n!}{k!(n-k)!} x^k y^{n-k} = \frac{1}{n!} (x+y)^n$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x+y)^n}{n!} = e^{x+y}$$

($\binom{n}{k}$ Bezeichnung dafür)

Binomischer Lehrsatz (Tutorium bzw. nächste Vorlesung / Übungsblatt).

Wachstum von e^x (schneller als $\forall$ Polynom): Tutorium

Prop. e ist irrat.

Beweis Ang, $e \in \mathbb{Q}$. Dann gilt $\frac{1}{e} \in \mathbb{Q}$, also $\frac{1}{e} = \frac{p}{q}$ für bestimmte $p, q \in \mathbb{N}$, d.h.,

$$\frac{p}{q} = e^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!}$$

Da $\frac{1}{n!} \searrow 0$, gilt nach dem Leibnizkrit. (Fehlerabschätzung):

$$(*) \quad \left| \frac{p}{q} - \sum_{n=0}^{q} \frac{(-1)^n}{n!} \right| \leq \frac{1}{(q+1)!}$$

Mult. (*) mit $q!$

$$\left| p \cdot (q-1)! - \sum_{n=0}^{q} (-1)^n \cdot \frac{q!}{n!} \right| \leq \frac{1}{q+1} < 1$$

$p \cdot (q-1)! =: m \in \mathbb{Z}$

$\frac{q!}{n!} \in \mathbb{N}$, da $q \geq n$

$|m| < 1$, $m \in \mathbb{Z} \Rightarrow m = 0$!

Zurück zu (*):

$\frac{p}{q} = \sum_{n=0}^{q} \frac{(-1)^n}{n!}$ – q-te Partialsumme

Aber für alt. Reihen mit $a_n \neq 0 \; \forall n$ gilt für Partialsummen und den Limes S

$$S_{2k} < S, \quad S_{2k+1} > S \quad \forall k$$ ↯

Also ist e irrat. ∎

Def Sei $x_0 \in \mathbb{R}$ und $(a_n)_{n=0}^{\infty} \subset \mathbb{R}$. Die Funktionenreihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n, \quad x \in \mathbb{R},$$

heißt eine Potenzreihe mit Entwicklungspunkt x_0 und den Koeffi. (a_n).

Bem. in $x = x_0$ konv. die Potenzreihe immer (abs.)

Bsp

1) Geom. Reihe: $\sum_{n=0}^{\infty} x^n$ $(x_0 = 0,\ a_n = 1\ \forall n)$

- konv. abs. für $|x| < 1$, div. sonst.

2) Exponentialreihe: $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ $\left(x_0 = 0,\ a_n = \frac{1}{n!}\right)$

- konv. überall abs.

3) Sinusreihe:

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} \mp \dots$$

$(x_0 = 0,$

$$a_n = \begin{cases} 0, & n \text{ gerade} \\ \frac{(-1)^k}{(2k+1)!}, & \text{wenn } n = 2k+1 \end{cases}$$

Die Reihe konv. abs. $\forall x$, da

$$\left|(-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}\right| = \frac{|x|^{2n+1}}{(2n+1)!},$$

d.h., $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{|x|^n}{n!} = e^{|x|}$ ist eine Majorante.

4) Kosinusreihe: $\boxed{\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \dots}$

($x_0 = 0$, $a_n = \begin{cases} 0, & n \text{ ungerade} \\ \frac{(-1)^k}{(2k)!}, & \text{wenn } n = 2k \end{cases}$)

Analog zur Sinusreihe konv. sie abs. $\forall x \in \mathbb{R}$

(mit Majorante $e^{|x|} = \sum \frac{|x|^n}{n!}$)

5) $\sum_{n=0}^{\infty} (x+1)^n$ $\quad x_0 = -1$, $a_n = 1 \ \forall n$

$(x-(-1))^n$

Die Reihe konv. abs. für $x \in (-2, 0)$.

(Variabelsubstitution: $y := x+1$: $\sum_{n=0}^{\infty} y^n$ konv. auf $(-1, 1)$)