Übungsaufgaben Wahrscheinlichkeitstheorie II

Prof. Dr. B. Fritzsche - Wintersemester 2017/2018

Serie V - Abgabe am 15.11.2017 bis spätestens 13.15 Uhr

V-1. Seien $n \in \mathbb{N}$ und bezeichne $\mathcal{S}_n$ die Menge aller Permutationen der Menge $\{1, 2, \ldots, n\}$. Seien $\mathfrak{A}_n := \mathfrak{P}(\mathcal{S}_n)$ und P_n die diskrete Gleichverteilung auf $\mathcal{S}_n$. Weiterhin sei $X : \mathcal{S}_n \to \mathbb{R}$ die Abbildung, die jedem $f \in \mathcal{S}_n$ die Anzahl seiner Fixpunkte zuordnet. Begründen Sie, dass X eine reelle Zufallsgröße mit endlichem Erwartungswert bezüglich P_n ist, die $E_{P_n}(X) = 1$ und

$$\mathrm{Var}_{P_n}(X) = \begin{cases} 0 & , \quad \text{falls } n = 1 \\ 1 & , \quad \text{falls } n \geq 2 \end{cases}$$

erfüllt.

V-2. Seien $(\Omega, \mathfrak{A}, \mu)$ ein Wahrscheinlichkeitsraum sowie $X, Y \in \mathcal{L}^1(\Omega, \mathfrak{A}, P; \mathbb{R})$. Weiterhin seien $a, b \in \mathbb{R}$. Weisen Sie die Gültigkeit folgender Aussagen nach:

(a) Es gilt $X \cdot Y \in \mathcal{L}^1(\Omega, \mathfrak{A}, P; \mathbb{R})$ genau dann, wenn $(X - a) \cdot (Y - b) \in \mathcal{L}^1(\Omega, \mathfrak{A}, P; \mathbb{R})$ erfüllt ist.

(b) Falls $X \cdot Y \in \mathcal{L}^1(\Omega, \mathfrak{A}, P; \mathbb{R})$ gilt, ist

$$E_P\left([X - E_P(X)][Y - E_P(Y)]\right) = E_P(X \cdot Y) - E_P(X) \cdot E_P(Y)$$

erfüllt.

V-3. Seien $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$ ein Wahrscheinlichkeitsraum, $n \in \mathbb{N}$ sowie $(X_j)_{j=1}^n$ eine Folge (bezüglich P) paarweise unkorrelierter reeller Zufallsgrößen mit endlicher mathematischer Erwartung (bezüglich P). Weisen Sie nach, dass $\sum_{j=1}^{n} X_j \in \mathcal{L}^1(\Omega, \mathfrak{A}, P; \mathbb{R})$ und

$$\mathrm{Var}_P\left(\sum_{j=1}^{n} X_j\right) = \sum_{j=1}^{n} \mathrm{Var}_P(X_j)$$

gelten.