Übungsblatt 5

1) Gegeben seien die folgenden 4 Vektoren im $\mathbb{R}^4$

$$v_1 = (1,2,0,0)^T, v_2 = (1,2,3,0)^T, v_3 = (1,2,3,5)^T, v_4 = (5,1,0,0)^T.$$

Wir betrachten nun die Menge $P = \{\sum_{i=1}^{4} t_i v_i \ : \ t_i \in [0,1]\}$. Zeigen Sie, dass P Lebesgue-meßbar ist, und berechnen Sie ihr 4-dimensionales Volumen $\mathcal{L}(P)$.

5 Punkte

2) Sei $\mathcal{B}$ eine σ-Algebra auf der Menge B und $f : A \to B$, $g : B \to C$ Funktionen.

a) Zeigen Sie, dass

$$\{f^{-1}(M) \, : \, M \in \mathcal{B}\} \text{ und } \{M \subset C \, : \, g^{-1}(M) \in \mathcal{B}\}$$

σ-Algebren auf A bzw. C sind. 3 Punkte

b) Finden Sie ein Beispiel, wo $\{g(M) \, : \, M \in \mathcal{B}\}$ keine σ-Algebra auf C ist. Kann g auch surjektiv sein? 1+3* Punkte

c) Wir setzen nun zusätzlich voraus, dass $\mathcal{B}$ eine unendliche Familie von Mengen ist. Zeigen Sie, dass $\mathcal{B}$ notwendigerweise überabzählbar ist.
[Hinweis: ein möglicher Zugang ist es, mit Induktion in n eine Folge $(B_n)_{n=1}^{\infty}$ nichtleerer Mengen aus $\mathcal{B}$ zu finden, so dass $B_i \cap B_j = \emptyset$ wenn $i \neq j$ und für jedes $n \geq 1$ die Familie $\{M \setminus \bigcup_{j=1}^{n} B_j \, : \, M \in \mathcal{B}\}$ unendlich ist.] 6* Punkte.

3) Seien (X, ϱ) und (Y, σ) metrische Räume und $f : X \to Y$ eine Lipschitz stetige Funktion, d.h. die Menge

$$LC(f) = \{c < \infty \ : \ \forall x, y \in X \ : \ \sigma(f(x), f(y)) \leq \varrho(x, y)\}$$

ist nichtleer. Zeigen Sie, dass $\inf LC(f) \in LC(f)$ und also das Minimum $Lip(f)$ ist. Beweisen Sie ausserdem

$$Lip(f) = \sup\{\frac{\sigma(f(x), f(y))}{\varrho(x, y)} \ : \ x \neq y \text{ aus } X\}.$$

Finden Sie eine (elementare) stetig (und sogar unendlich oft) differenzierbare Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $Lip(f) = 1$ aber das obige Supremum wird nicht angenommen. $1 + 2 + 2$ Punkte

4) Finden Sie eine Borelsche Menge $B \subset [0,1]$, die zwar Lebesguemaß $\mathcal{L}(B) > 0$ positiv, aber keine inneren Punkte hat, d.h kein Intervall enthält.

Finden Sie nun eine abgeschlossene Menge $F \subset [0,1]$ mit den selben Eigenschaften. $1 + 3$ Punkte

Abgabe am 15.11.2017, 9.10 Uhr Hörsaal 5

Die Übungsscheinklausur findet am 6.2.2018 von 9.15-10.45 im FKH statt.