Übungsaufgaben Wahrscheinlichkeitstheorie II

Prof. Dr. B. Fritzsche - Wintersemester 2017/2018

Serie VIII - Abgabe am 06.12.2017 bis spätestens 13.15 Uhr

VIII-1. Seien $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$ und bezeichne $\triangle := [a, b]$. Weiterhin symbolisiere $\mu_\triangle$ die kontinuierliche Gleichverteilung auf $\triangle$:

$$\mu_\triangle := \frac{1}{b-a} 1_\triangle \odot \lambda^{(1)}.$$

Weisen Sie die Gültigkeit folgender Aussagen nach:

(a) $\mu_\triangle \in \mathcal{M}^1_{+,\infty}(\mathbb{R}^1, \mathfrak{B}_1)$.

(b) Für jedes $k \in \mathbb{N}_0$ gilt

$$M_k(\mu_\triangle) = \frac{1}{k+1} \frac{b^{k+1} - a^{k+1}}{b-a}.$$

(c) $M_1(\mu_\triangle) = \frac{a+b}{2}$ und $\operatorname{var}(\mu_\triangle) = \frac{(b-a)^2}{12}$.

(d) Es ist $\mu_\triangle$ genau dann standardisiert, d.h. es gelten $M_1(\mu_\triangle) = 0$ und $\operatorname{var}(\mu_\triangle) = 1$, wenn $\triangle = \left[-\sqrt{3}, \sqrt{3}\right]$ ist.

VIII-2. Seien $n \in \mathbb{N}$ sowie $((\Omega_j, \mathfrak{A}_j))_{j=1}^n$ und $((\Omega'_j, \mathfrak{A}'_j))_{j=1}^n$ Folgen von nichttrivialen messbaren Räumen. Für jedes $j \in \mathbb{Z}_{1,n}$ sei $T_j : \Omega_j \to \Omega'_j$ eine $\mathfrak{A}_j - \mathfrak{A}'_j$-messbare Abbildung. Weiterhin sei $T : \mathop{\times}\limits_{j=1}^{n} \Omega_j \to \mathop{\times}\limits_{j=1}^{n} \Omega'_j$ gemäß

$$T\left((\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n)\right) := (T_1(\omega_1), T_2(\omega_2), \ldots, T(\omega_n))$$

definiert. Begründen Sie, dass T eine $\left(\bigotimes\limits_{j=1}^{n} \mathfrak{A}_j\right) - \left(\bigotimes\limits_{j=1}^{n} \mathfrak{A}'_j\right)$-messbare Abbildung ist.

VIII-3. Seien Ω_1 und Ω_2 nichtleere Mengen. Weiterhin seien $\omega_1 \in \Omega_1$ sowie $\omega_2 \in \Omega_2$. Begründen Sie die Gültigkeit folgender Aussagen:

(a) Sei $Q \in \mathcal{P}(\Omega_1 \times \Omega_2)$. Dann gelten

$$([\Omega_1 \times \Omega_2] \setminus Q)_{\omega_1 \bullet} = \Omega_2 \setminus Q_{\omega_1 \bullet} \qquad \text{sowie} \qquad ([\Omega_1 \times \Omega_2] \setminus Q)_{\bullet\, \omega_2} = \Omega_1 \setminus Q_{\bullet\, \omega_2}\,.$$

(b) Sei $(Q_k)_{k \in I}$ eine Familie von Teilmengen von $\Omega_1 \times \Omega_2$. Dann gelten

$$\left(\bigcup_{k \in I} Q_k\right)_{\omega_1 \bullet} = \bigcup_{k \in I} (Q_k)_{\omega_1 \bullet} \qquad \text{sowie} \qquad \left(\bigcup_{k \in I} Q_k\right)_{\bullet\, \omega_2} = \bigcup_{k \in I} (Q_k)_{\bullet\, \omega_2}\,.$$

(c) Seien $A_1 \in \mathcal{P}(\Omega_1)$ und $A_2 \in \mathcal{P}(\Omega_2)$. Dann gelten

$$(A_1 \times A_2)_{\omega_1 \bullet} = \begin{cases} A_2 & , \text{ falls } \quad \omega_1 \in A_1 \\ \emptyset & , \text{ falls } \quad \omega_1 \in \Omega_1 \setminus A_1 \end{cases}$$

sowie

$$(A_1 \times A_2)_{\bullet\, \omega_2} = \begin{cases} A_1 & , \text{ falls } \quad \omega_2 \in A_2 \\ \emptyset & , \text{ falls } \quad \omega_2 \in \Omega_2 \setminus A_2 \end{cases}.$$

Wir laden Euch zur alljährlichen Weihnachtsvorlesung am 12.12.217 um 19.00 Uhr in den Hörsaal 9 ein! Dr. Heiner Olbermann hält die Vorlesung und der Chor stimmt uns musikalisch auf die Feiertage ein. Dazu gibt es weihnachtliche Getränke, Gebäck und festliche Stimmung. Wir freuen uns auf Euch.
Der Fachschaftsrat