

Partielle Differentialgleichungen I

Blatt 3

Lösungen bitte zur Übung am 27. Oktober 2017 mitbringen

Aufgabe 9. Sei $u \in C^1(\mathbb{R}^n)$. Verwenden Sie den Divergenzsatz von Gauss mit Vektorfeld $u(x)x$, um die Formel

$$\int_{B(0,R)} u(x) dx = \int_0^R \int_{\partial B(0,r)} u(x) dS(x) dr$$

für alle $R > 0$ zu beweisen.

Aufgabe 10. Sei $U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen und beschränkt und $u \in C^2(U) \cap C^0(\bar{U})$, $f \in C^0(\bar{U})$ eine Lösung von

$$-\Delta u = f \quad \text{in } U, \quad u = 0 \quad \text{auf } \partial U.$$

Beweisen Sie, dass

$$\|u\|_{L^\infty(U)} \leq C \|f\|_{L^\infty(U)},$$

wobei C eine Konstante ist, die nur von n und dem Durchmesser d von U abhängt.

Hinweise: der Durchmesser von U ist gegeben durch $d := \sup\{|x - y| : x, y \in U\}$. Vergleichen Sie u mit Parabeln und verwenden Sie das Maximumprinzip für subharmonische Funktionen.

Aufgabe 11 (Distributionelle Ableitungen). Sei $u(x) := |x|$ für alle $x \in \mathbb{R}$ die Betragsfunktion. Bestimmen Sie die erste und zweite distributionelle Ableitung von u (genau genommen von T_u).

Lösung. Schreiben wir zunächst die Definition von Distribution. Sei $U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen. Es gibt zwei Definitionen, die äquivalent sind.

Definition A. Eine *Distribution* auf U ist eine lineare Abbildung $T : C_c^\infty(U) \rightarrow \mathbb{R}$ die die folgende „Stetigkeitseigenschaft“ hat: für alle $K \subseteq U$, K kompakt, existiert eine Konstante $C = C(K)$ und eine Zahl $n = n(K) \in \mathbb{N}$ so dass

$$|T(\varphi)| \leq C(K) \sum_{|\alpha| \leq n(K)} \max_K |D^\alpha \varphi|$$

für alle $\varphi \in C_c^\infty(U)$ mit $\text{supp } \varphi \subseteq K$.

Bemerkung: In der Unterricht habe ich wahrscheinlich eine falsche Definition auf der Tafel geschrieben!

Sei jetzt $\varphi_k \in C_c^\infty(U)$, $k \in \mathbb{N}$, eine Folge und sei $\varphi \in C_c^\infty(U)$. Wir sagen, dass $\varphi_k \rightarrow \varphi$ in $C_c^\infty(U)$ falls ein $K \subseteq U$ kompakt existiert, so dass $\text{supp } \varphi \subseteq K$ für alle k und

$$D^\alpha \varphi_k \rightarrow D^\alpha \varphi \text{ gleichmäßig in } K$$

für alle Multiindizes α .

Definition B. Eine *Distribution* auf U ist eine lineare Abbildung $T : C_c^\infty(U) \rightarrow \mathbb{R}$ so dass T auch „stetig“ ist, d.h. $T(\varphi_k) \rightarrow T(\varphi)$, falls $\varphi_k \rightarrow \varphi$ in $C_c^\infty(U)$.

Wie gesagt, sind die zwei Definitionen äquivalent (das ist eine gute Übung: der Beweis ist ähnlich dem Beweis, dass ein linearer Operator auf einem Banachraum stetig ist genau dann, wenn er beschränkt ist).

Sei jetzt $u \in L_{loc}^1(U)$. Wir können immer der Funktion u eine Distribution T_u durch

$$T_u(\varphi) = \int_U u(x)\varphi(x)dx. \quad (4)$$

assoziiieren. Es ist nicht schwierig, zu sehen, dass T_u eine Distribution ist (d.h. linear und stetig im Sinn von Def. A oder B: das auch ist eine gute Übung!).

Sei jetzt T eine Distribution auf U und sei α ein Multiindex. Die α -Ableitung von T ist durch die Formel

$$(D^\alpha T)(\varphi) = (-1)^{|\alpha|} T(D^\alpha \varphi), \quad \varphi \in C_c^\infty(U),$$

definiert. Noch eine gute Übung: zeigen Sie, dass $D^\alpha T$ eine Distribution ist (d.h. linear und stetig). Insbesondere, wenn $U = \mathbb{R}$, wir haben

$$T'(\varphi) = -T(\varphi'). \quad (5)$$

Betrachten wir jetzt die Funktion $u(x) = |x|$. Natürlich $u \in L_{loc}^1$ und deswegen können wir die Distribution T_u betrachten, die durch (4) definiert ist, d.h.

$$T_u(x) = \int_{-\infty}^{\infty} |x|\varphi(x)dx = \int_0^{\infty} x\varphi(x)dx - \int_{-\infty}^0 x\varphi(x)dx.$$

Die erste (distributionelle) Ableitung von T_u ist durch (5) definiert. Deswegen

$$\begin{aligned} T_u'(\varphi) &= -T_u(\varphi') \\ &= + \int_{-\infty}^0 x\varphi'(x)dx - \int_0^{\infty} x\varphi'(x)dx \\ &= + \int_{-\infty}^0 (x\varphi(x))'dx - \int_{-\infty}^0 \varphi(x)dx - \int_0^{\infty} (x\varphi(x))'dx + \int_0^{\infty} \varphi(x)dx \\ &= - \int_{-\infty}^0 \varphi(x)dx + \int_0^{\infty} \varphi(x)dx, \end{aligned}$$

wobei wir verwendet haben, dass die Funktion $x\varphi(x)$ gleich Null ist in $-\infty, 0, \infty$, da φ kompakten Träger hat. Wir haben dann

$$T'_u(\varphi) = \int_{-\infty}^{\infty} \text{sign}(x)\varphi_x,$$

wobei

$$\text{sign}(x) := \begin{cases} 1, & x > 0, \\ 0, & x = 0, \\ -1, & x < 0, \end{cases}$$

die Vorzeichenfunktion ist. In anderen Worten, ist $T'_u = T_{\text{sign}}$. Wir können dann sagen, dass die Vorzeichenfunktion die Ableitung von $|x|$ ist „im distributionellen Sinn“.

Berechnen wir jetzt, die zweite Ableitung von T_u , i.e. die erste Ableitung von T'_u :

$$\begin{aligned} T''_u(\varphi) &= -T'_u(\varphi') \\ &= - \int_{-\infty}^{\infty} \text{sign}(x)\varphi'(x)dx \\ &= \int_{-\infty}^0 \varphi'(x)dx - \int_0^{\infty} \varphi'(x)dx \\ &= \varphi(0) + \varphi(0) \\ &= 2\varphi(0), \end{aligned}$$

wobei wir wieder verwendet haben, dass φ kompakten Träger hat. Dann ist die zweite distributionelle Ableitung von T_u die Distribution die jeder $\varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R})$ die Zahl $2\varphi(0)$ zuordnet.

Wichtige Bemerkung: In diesem Fall ist T''_u nicht eine Distribution der Form T_f für eine Funktion $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R})$!

Die Distribution $T(\varphi) := \varphi(0)$ wird *Dirac Delta* genannt und mit dem Zeichen δ_0 bezeichnet. So $T''_u = 2\delta_0$.

Aufgabe 12. Sei $n \geq 3$. Verändern Sie den Beweis der Mittelwertformel und zeigen Sie damit, dass

$$u(x) = \int_{\partial B(x,R)} u(y) dS(y) - \frac{1}{n(n-2)\alpha(n)} \int_{B(x,R)} \left(\frac{1}{|x-y|^{n-2}} - \frac{1}{R^{n-2}} \right) \Delta u(y) dy$$

für alle $u \in C^2(\mathbb{R}^n)$ und $x \in \mathbb{R}^n$, $R > 0$, wobei $\alpha(n) = \text{Vol}(B(0,1))$.