Übungsaufgaben Wahrscheinlichkeitstheorie II

Prof. Dr. B. Fritzsche - Wintersemester 2017/2018

Serie I - Abgabe: 18.10.2017 bis spätestens 13.15 Uhr

I-1. Seien $a \in \mathbb{R}$ und $\sigma \in (0,\infty)$. Es sei $f_{a,\sigma^2} : \mathbb{R} \to (0,\infty)$ definiert gemäß

$$x \mapsto \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left\{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}\right\}.$$

Beweisen Sie folgende Aussagen:

(a) Sei $x \in \mathbb{R}$. Dann gilt $f_{a,\sigma^2}(x) \in (0,\infty)$ sowie $f_{a,\sigma^2}(a+x) = f_{a,\sigma^2}(a-x)$.

(b) Es ist f_{a,σ^2} zweimal differenzierbar auf $\mathbb{R}$ und für $x \in \mathbb{R}$ gelten

$$f'_{a,\sigma^2}(x) = -\frac{x-a}{\sigma^2} \cdot f_{a,\sigma^2}(x)$$

sowie

$$f''_{a,\sigma^2}(x) = \frac{1}{\sigma^2} \cdot \left[\left(\frac{x-a}{\sigma}\right)^2 - 1\right] \cdot f_{a,\sigma^2}(x).$$

(c) Es ist f_{a,σ^2} in $(-\infty, a]$ (bzw. $[a,\infty)$) streng monoton wachsend (bzw. streng monoton fallend).

(d) Es gilt

$$\sup_{x\in\mathbb{R}} f_{a,\sigma^2}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}},$$

wobei das Supremum genau für $x = a$ angenommen wird.

(e) Es ist f_{a,σ^2} in den Intervallen $(-\infty, a-\sigma]$ und $[a+\sigma,\infty)$ strikt konvex und in $[a-\sigma, a+\sigma]$ strikt konkav. In den Punkten $x = a-\sigma$ und $x = a+\sigma$ liegt jeweils ein Wendepunkt von f_{a,σ^2} vor.

(f) Es gelten

$$\lim_{x\to+\infty} f_{a,\sigma^2}(x) = 0$$

sowie

$$\lim_{x\to-\infty} f_{a,\sigma^2}(x) = 0.$$

I-2. Seien $\sigma, \eta \in (0,+\infty)$. Zeigen Sie die Gültigkeit der Ungleichungen

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{\sigma\eta}{\sigma^2+\eta^2} \exp\left(-\frac{\eta^2}{2\sigma^2}\right) < N_{0,\sigma^2}([\eta,+\infty)) < \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{\sigma}{\eta} \exp\left(-\frac{\eta^2}{2\sigma^2}\right).$$

I-3. Beweisen Sie den folgenden Zusammenhang zwischen der Standardnormalverteilung $N_{0,1}$ und ihrer kanonischen $\lambda^{(1)}$-Dichte $f_{0,1}$:

$$\lim_{\eta\to+\infty} \frac{N_{0,1}([\eta,+\infty))}{\frac{f_{0,1}(\eta)}{\eta}} = 1.$$