Übungsaufgaben zur Vorlesung Lineare Algebra I

Wintersemester 2017/18, Prof. Dr. B. Fritzsche

Serie 5 - Abgabetermin 13.11.2017

5-A (a) Seien $[K, +, \cdot]$ ein Körper (mit Nullelement 0 und Einselement 1) und U eine nichtleere Teilmenge von K. Beweisen Sie die Äquivalenz folgender Aussagen:

(i) $[U, +, \cdot]$ ist ein Unterkörper von $[K, +, \cdot]$, d.h. die Teilmenge U von K bildet bezüglich der in K definierten Addition und Multiplikation selbst einen Körper.

(ii) Es sind folgende drei Bedingungen erfüllt:

(α) U enthält mindestens zwei Elemente.

(β) Für alle $u_1, u_2 \in U$ gilt $u_1 - u_2 \in U$.

(γ) Für alle $u_1 \in U$ und alle $u_2 \in U \setminus \{0\}$ gilt $u_1 u_2^{-1} \in U$.

(b) Zeigen Sie, dass die Menge aller reellen Zahlen der Gestalt $\alpha + \beta\sqrt{2}$, wobei α und β aus $\mathbb{Q}$ sind, bezüglich der in $\mathbb{R}$ definierten Addition und Multiplikation einen Körper bildet.

5-B Welche der folgenden Mengen M sind Unterräume der angegebenen K-Vektorräume V?

(a) $M = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 : 3x_1 + x_2 = 1 \right\}$, $V = \mathbb{R}^3, K = \mathbb{R}$;

(b) $M = \left\{ \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^3 : z_1 + z_2 = 0 \right\}$, $V = \mathbb{C}^3, K = \mathbb{C}$;

(c) $M = \left\{ \begin{pmatrix} \mu + \lambda^2 \\ \mu \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 : \mu, \lambda \in \mathbb{R} \right\}$, $V = \mathbb{R}^2, K = \mathbb{R}$;

(d) $M = \left\{ \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^2 : |z_1|^2 - |z_2|^2 \leq 1 \right\}$, $V = \mathbb{C}^2, K = \mathbb{C}$;

(e) $M = \{f \in \mathbb{R}_{[-a,a]} : f(-x) = f(x) \text{ für alle } x \in [-a, a]\}$, $V = \mathbb{R}_{[-a,a]}$, wobei $a \in (0, +\infty)$ ist, $K = \mathbb{R}$.

5-C Seien V_1 und V_2 Unterräume eines K-Vektorraumes V. Weisen Sie nach, dass $W := V_1 \cup V_2$ genau dann ein Unterraum von V ist, wenn $V_1 \subseteq V_2$ oder $V_2 \subseteq V_1$ gilt.

5-D Es bezeichne s die Menge aller Folgen $(x_j)_{j=1}^{\infty}$ reeller Zahlen, wobei Folgen $(x_j)_{j=1}^{\infty}$ und $(y_j)_{j=1}^{\infty}$ aus s genau dann als gleich angesehen werden, wenn $x_j = y_j$ für alle $j \in \mathbb{N}$ gilt.

(a) Zeigen Sie, dass sich s mit der wie folgt definierten Addition und Vielfachbildung als Vektorraum über $\mathbb{R}$ erweist: Für alle $(x_j)_{j=1}^{\infty}$ und $(y_j)_{j=1}^{\infty}$ aus s und alle $\alpha \in \mathbb{R}$ seien $(x_j)_{j=1}^{\infty} + (y_j)_{j=1}^{\infty} := (x_j + y_j)_{j=1}^{\infty}$ und $\alpha(x_j)_{j=1}^{\infty} := (\alpha x_j)_{j=1}^{\infty}$.

(b) Weisen Sie nach, dass die Teilmenge m aller beschränkten Folgen aus s ein Unterraum von s ist.

(c) Weisen Sie nach, dass die Teilmenge c aller konvergenten Folgen aus s ein Unterraum von m ist.

(d) Für $\rho \in \mathbb{R}$ bezeichne c_ρ die Menge aller konvergenten Folgen $(x_j)_{j=1}^{\infty}$ aus s mit $\lim_{j\to\infty} x_j = \rho$. Untersuchen Sie, für welche $\rho \in \mathbb{R}$ die Menge c_ρ ein Unterraum von c ist.

5-Z Sei K ein Körper mit Nullelement 0 und Einselement 1. Falls keine positive ganze Zahl p derart existiert, dass $\sum_{j=1}^{p} 1 = 0$ ist, so heißt K ein Körper der Charakteristik 0. Falls eine positive ganze Zahl p mit $\sum_{j=1}^{p} 1 = 0$ existiert, so wird die kleinste solche Zahl p als *Charakteristik von* K bezeichnet.

(a) Sei $p \in \mathbb{N}$ und K ein Körper der Charakteristik p. Begründen Sie, dass p eine Primzahl ist.

(b) Sei p eine Primzahl und K ein Körper der Charakteristik p. Begründen Sie, dass dann K mindestens p verschiedene Elemente enthält.

(c) Geben Sie je ein Beispiel für einen Körper mit Charakteristik $0; 2$ und 3 an!