Grundlagen der Mathematik
Übungsaufgaben
Serie 8

## Hinweis

Bitte vermerken Sie auf jedem Blatt Ihren Namen und Ihre Matrikelnummer. Geben Sie ferner an, an welchem Wochentag und zu welcher Uhrzeit Ihre Übung stattfindet. Geben Sie Ihre Lösungen bis Mittwoch, 06.12.2017, 10:45 Uhr im Hörsaal 6 oder im Postfach von S. Hintze in der 5. Etage des Neuen Augusteums ab.

## Aufgabe 1

Untersuchen Sie, ob die folgenden Zuordnungen Homomorphismen sind. Nutzen Sie beim Argumentieren Ihnen aus der Schule bekannte Rechenregeln. (5P)

a) $f_1 : (\mathbb{N}, +) \to (\mathbb{N}, +)$ mit $f_1(x) = 5 \cdot x + 7$

b) $f_2 : (\mathbb{N}, \cdot) \to (\mathbb{N}, \cdot)$ mit $f_2(x) = x^2$

c) $f_3 : (\mathbb{R}^+, \cdot) \to (\mathbb{R}, +)$ mit $f_3(x) = \ln(x)$
*Hinweis: $\mathbb{R}^+$ ist die Menge aller positiven reellen Zahlen.*

d) $f_4 : (\mathbb{N}, +) \to (\mathbb{Q}, \cdot)$ mit $f_4(x) = \dfrac{x}{2}$

e) $f_5 : (\mathbb{N}, +) \to (\mathbb{N}, +)$ mit $f_5(x) = 7 \cdot x$

## Aufgabe 2

In der folgenden Aufgabe wird die Abbildung $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{Z}$ mit

$$\varphi(n) = \begin{cases} \frac{n-1}{2} & \text{falls } n \text{ ungerade ist} \\ -\frac{n}{2} & \text{falls } n \text{ gerade ist} \end{cases}$$

betrachtet.

a) Geben Sie $\varphi(7)$ und $\varphi(21)$ an. (1P)

b) Geben Sie $n_1 \in \mathbb{N}$ an, so dass $\varphi(n_1) = -25$ gilt. Geben Sie $n_2 \in \mathbb{N}$ an, so dass $\varphi(n_2) = 0$ gilt. (1P)

bitte wenden

c) Zeigen Sie, dass die Abbildung $\varphi$ eine bijektive Abbildung ist. Führen Sie den Beweis mithilfe einer vollständigen Fallunterscheidung und folgen Sie dabei dem vorgegebenen Schema. Nutzen Sie Ihnen aus der Schule bekannte Rechenregeln. (7P)

(1) Zu zeigen: $\varphi$ ist injektiv, d.h. $\forall m, n \in \mathbb{N} : (n \neq m) \rightarrow (\varphi(n) \neq \varphi(m))$.
Fallunterscheidung:

Fall 1: $n$ sei gerade. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit sei $n$ größer als $m$.
Ist $m$ gerade, dann gilt: ...
Ist $m$ ungerade, dann gilt: ...

Fall 2: $n$ sei ungerade. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit sei $n$ größer als $m$.
Ist $m$ gerade, dann gilt: ...
Ist $m$ ungerade, dann gilt: ...

(2) Zu zeigen: $\varphi$ ist surjektiv, d.h. $\forall z \in \mathbb{Z}\ \exists n \in \mathbb{N} : \varphi(n) = z$.
Fallunterscheidung:

Fall 1: Ist $z \geq 0$, dann gilt: ...

Fall 2: Ist $z < 0$, dann gilt: ...

d) Kurt ist der Meinung, dass es mehr ganze Zahlen als natürliche Zahlen gibt. Entscheiden Sie mit Hilfe der oben gegebenen Abbildung, ob er damit Recht hat und berichtigen Sie die Aussage gegebenenfalls. (1P)

## Aufgabe 3

Gegeben sei die Menge $P = \{2; 3; 5; 7; 11; 13\}$. Für alle $p, q \in P$ sei $p \circ q = z$ wobei $z$ der größte Primfaktor der Zahl $(p + q - 2)$ ist.

a) Stellen Sie die Verknüpfungstafel für die Operation $\circ$ auf. Begründen Sie mit Hilfe der Tafel, dass $\circ$ kommutativ ist und dass $\circ$ eine innere Verknüpfung auf $P$ ist. (3P)

b) Zeigen Sie, dass es ein neutrales Element in $P$ bezüglich $\circ$ gibt und dass jedes Element aus $P$ ein inverses Element bezüglich $\circ$ hat. (2P)

c) Begründen Sie, dass $(P, \circ)$ keine Gruppe ist. (1P)