Übungsaufgaben Wahrscheinlichkeitstheorie II

Prof. Dr. B. Fritzsche - Wintersemester 2017/2018

Serie XI - Abgabe am 10.01.2018 bis spätestens 13.15 Uhr

XI-1. Seien $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$ ein W-Raum und $(\mathcal{E}_j)_{j\in J}$ eine (bez. P) stochastisch unabhängige Familie von nichtleeren Teilmengen von $\mathfrak{A}$. Für jedes $j \in J$ sei $\mathcal{E}_j$ $\cap$-stabil. Weiterhin sei $(J_k)_{k\in\mathcal{K}}$ eine Zerlegung von J, d.h., $(J_k)_{k\in\mathcal{K}}$ ist eine Familie paarweise disjunkter Teilmengen von J mit $\cup_{k\in\mathcal{K}} J_k = J$. Für jedes $k \in \mathcal{K}$ bezeichne

$$\mathfrak{A}_k := \begin{cases} \{\emptyset, \Omega\}, & \text{falls} \quad J_k = \emptyset \\ \sigma_\Omega(\cup_{l\in J_k} \mathcal{E}_l), & \text{falls} \quad J_k \neq \emptyset \end{cases}.$$

Zeigen Sie, dass die Familie $(\mathfrak{A}_k)_{k\in\mathcal{K}}$ stochastisch unabhängig (bezüglich P) ist.

XI-2. Seien $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$ ein W-Raum und $A \in \mathfrak{A}$. Bezeichne $\mathcal{D}_{A,P}$ die Menge aller $D \in \mathfrak{A}$, welche (bezüglich P) von A stochastisch unabhängig sind, d.h.:

$$\mathcal{D}_{A,P} := \{D \in \mathfrak{A} : P(A \cap D) = P(A) \cdot P(D)\}.$$

Weisen Sie die Gültigkeit folgender Aussagen nach:

(a) $\mathcal{D}_{A,P}$ ist ein Dynkin-System. Insbesondere gilt $\mathcal{D}_{A,P} \neq \emptyset$.

(b) Bezeichne $\mathfrak{A}_{P,0}$ das System aller $B \in \mathfrak{A}$, für welche $P(B) = 0$ oder $P(\Omega \setminus B) = 0$ gilt. Dann gelten:

(b1) Falls $A \in \mathcal{D}_{A,P}$ ist, gilt $A \in \mathfrak{A}_{P,0}$.

(b2) $\mathfrak{A}_{P,0} = \cap_{C\in\mathfrak{A}} \mathcal{D}_{C,P}$.

XI-3. Seien $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$ ein W-Raum, $n \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$ und $(X_j)_{j=1}^n$ eine Folge von bezüglich P stochastisch unabhängigen $(\mathbb{R}^1, \mathfrak{B}_1)$-Zufallsvariablen auf $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$. Weisen Sie die Gültigkeit folgender Aussagen nach:

(a) Sei $Y := \max\limits_{j\in\{1,\dots,n\}} X_j$. Dann ist Y eine $(\mathbb{R}^1, \mathfrak{B}_1)$-Zufallsvariable auf $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$ und für die entsprechenden Verteilungsfunktionen gilt

$$F_{P_Y,l} = \prod_{j=1}^n F_{P_{X_j},l} \quad \text{sowie} \quad F_{P_Y,r} = \prod_{j=1}^n F_{P_{X_j},r}.$$

(b) Sei $Z := \min\limits_{j\in\{1,\dots,n\}} X_j$. Dann ist Z eine $(\mathbb{R}^1, \mathfrak{B}_1)$-Zufallsvariable auf $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$ und es gilt

$$F_{P_Z,l} = 1 - \prod_{j=1}^n [1 - F_{P_{X_j},l}] \quad \text{sowie} \quad F_{P_Z,r} = 1 - \prod_{j=1}^n [1 - F_{P_{X_j},r}].$$