Übungsaufgaben zur Vorlesung Lineare Algebra I

Wintersemester 2017/18, Prof. Dr. B. Fritzsche

Serie 4 - Abgabetermin 06.11.2017

4-A Seien $[G, \circ]$ eine Gruppe sowie U eine nichtleere Teilmenge von G. Beweisen Sie die Äquivalenz folgender Aussagen:

(i) $[U, \circ]$ ist eine Untergruppe von $[G, \circ]$.

(ii) Für alle $a, b \in U$ gilt $a \circ b^{-1} \in U$.

4-B. Zeigen Sie, dass die Menge $R := \left\{ \frac{a}{b} : a, b \in \mathbb{Z}, b \text{ ungerade} \right\}$ einen kommutativen Ring mit Einselement bildet, der kein Körper ist.

4-C. Geben Sie (z.B. mit Hilfe von Additions- und Multiplikationstafeln) einen Körper

(a) mit genau 2 Elementen

(b) mit genau 3 Elementen

an.

4-D Zeigen Sie, dass die Menge aller komplexen Zahlen $\alpha + i\beta$ mit $\alpha \in \mathbb{Q}$ und $\beta \in \mathbb{Q}$ einen Körper bildet.

4-Z Sei K ein Körper mit Nullelement 0 und Einselement 1. Für alle $n \in \mathbb{N}$ und alle $a_1, a_2, \ldots, a_n \in K$ seien $\sum_{k=1}^{1} a_k := a_1$, $\prod_{k=1}^{1} a_k := a_1$ sowie für $n \neq 1$ weiterhin

$$\sum_{k=1}^{n} a_k := \left(\sum_{k=1}^{n-1} a_k \right) + a_n \quad , \quad \prod_{k=1}^{n} a_k := \left(\prod_{k=1}^{n-1} a_k \right) \cdot a_n .$$

Formal wird $\sum_{k=1}^{0} a_k := 0$ und $\prod_{k=1}^{0} a_k := 1$ gesetzt. Für alle $a \in K$ sei weiterhin $a^0 := 1$ und $a^n := \prod_{k=1}^{n} a$ für beliebiges $n \in \mathbb{N}$.

(a) Weisen Sie nach, dass für alle $a, b \in K$ und alle $n \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$ die Beziehung

$$a^n - b^n = (a - b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + \ldots + ab^{n-2} + b^{n-1})$$

gilt.

(b) Zeigen Sie, dass für alle $a \in K \setminus \{1\}$ und alle $n \in \mathbb{N}$ die Gleichung

$$\sum_{k=0}^{n-1} a^k = (1 - a^n)(1 - a)^{-1}$$

gilt.